

Dossier : L'arithmétique

*En arithmétique, un et un font deux.
En amour un et un devraient faire un,
et ça fait deux tout de même.*

Guy de Maupassant, *Yvette*

Dans le petit monde des mathématiciens, du chercheur de pointe jusqu'à l'humble amateur et en passant par tous ceux qui enseignent cette noble discipline, l'arithmétique occupe une place à part : nous en sommes presque tous amoureux !

D'où vient cet amour ?

Sans doute l'objet fondamental même de l'arithmétique, ces simples entiers naturels, n'y sont pas pour rien. Kronecker en disait qu'ils étaient l'œuvre de Dieu et que tout le reste était fabriqué par les hommes. En tout cas, avec la perception de l'espace (géométrie), ils forment les deux piliers *naturels* les plus anciens des mathématiques.

Sans doute aussi du fait que beaucoup de problèmes de l'arithmétique se posent en termes simples, faisant immédiatement sens, et que leurs solutions, par contre, peuvent être immédiates, moins immédiates, franchement difficiles ou compliquées, très ardues, voire inconnues. Le grand théorème de Fermat, déjà évoqué par Diophante, et dont la démonstration a résisté, de Fermat à Wiles, durant plus de trois siècles à tant d'amateurs et de mathématiciens de première grandeur, est un superbe exemple d'une telle situation (en outre, sa résolution, avec toute une dramaturgie d'espoirs et de doutes jusqu'à la certitude finale, a bénéficié, pour le plus grand bien de l'image des mathématiques, d'une belle couverture médiatique).

Présente dans l'enseignement secondaire pendant de longues années, l'arithmétique en a été éliminée au début des années 80 par une commission de programmes à laquelle j'appartenais (mea culpa !). Ne croyez pas que cela ait été fait dans l'enthousiasme ou dans un délire masochiste. Nous étions en face d'un discours qui mettait face à notre amour de matheux pour l'arithmétique, un appétit beaucoup moins évident de ceux de nos élèves qui, même scientifiques, n'avaient pas cette fibre particulière (y a-t-il un gène de l'arithmétique ?). L'arithmétique comme signe distinctif des *vrais* matheux ! Et puis il fallait *alléger* d'une quantité significative : la déesse Arithmétique dans son splendide isolement en fit les frais !

Pendant plus de dix ans, nous autres profs de maths vivions avec cet amour caché. Certes beaucoup d'entre nous continuaient de pratiquer l'arithmétique avec plaisir et émotion, mais c'était un plaisir solitaire que nous ne faisons plus partager à nos élèves. Et, pour un enseignant digne de ce nom, ne pas faire partager avait quelque chose de frustrant.

Miracle ! Notre arithmétique revient, très modestement, dans les programmes de l'enseignement secondaire. Dans ceux de Terminale Scientifique évidemment, mais quelques allusions ici ou là, l'air du temps, l'importance du numérique discret dans les calculatrices, les tableurs, donnent à toutes ces questions une place de plus en plus prégnante, même si elle reste parfois encore discrète, implicite.

Quel plaisir de voir les IREM, malgré leur peu de moyens, publier maintes brochures, opérationnaliser cet élan, diffuser ce fourmillement d'idées, animer ce qui reste de formation continue. Et à lire les brochures on sent le plaisir que leurs auteurs y ont pris (ou retrouvé). Une fois de plus les IREM montrent toute l'importance de leur existence, tout l'intérêt de leur statut mettant ensemble les enseignants du primaire, du supérieur et du secondaire, un peu en dehors de la hiérarchie administrative. Bref un espace de liberté, de rencontre et de travail !

L'APM ne pouvait pas rester en dehors du mouvement. Elle a déjà publié la très belle brochure de Mathieu Savin, *Arithmétique : des résultats classiques par des moyens élémentaires*. Quel que soit votre niveau en la matière, vous y trouverez de quoi vous régaler et, pour vous faire une opinion plus précise, vous pouvez lire la recension qu'Henri Bareil en a fait dans le numéro 431. Après le dossier consacré à la géométrie, voilà donc un dossier consacré à l'arithmétique. Il s'étendra sur deux, voire trois bulletins. Notre intention première n'est pas de produire des documents directement utilisables dans la classe, dans le droit fil des programmes. Cela est fait dans les manuels et puis chacun, en plus, adaptera son enseignement à ses élèves et à ses convictions didactiques. Notre volonté est d'apporter aux uns, de rappeler aux autres, dans quel contexte historique, technique, culturel, utilitaire, l'arithmétique évolue. Nous espérons que chacun y trouvera son plaisir, des idées pour illustrer son enseignement, pour le resituer dans un contexte plus large.

Dans ce bulletin, nous ouvrons ce dossier par une promenade ou plutôt une randonnée (il y a quand même quelques passages ardu) dont le guide est Marc Guinot à travers un texte fort judicieusement intitulé *L'arithmétique, pourquoi ?* et essentiellement centré sur deux thèmes : les entiers sommes de deux carrés et l'infinité des nombres premiers. Cette randonnée est à la fois mathématique, à travers différentes méthodes pour démontrer un même résultat, et historique, à travers le rôle qu'ont joué des mathématiciens aussi prestigieux que Fermat, Euler, Gauss, ... ou des amateurs plus ou moins connus comme Aubry ou Goldbach.

Mathieu Savin aborde avec sa clarté coutumière un problème qui est à la fois du ressort de l'arithmétique et de l'analyse, du ressort du discret et du continu : *L'approximation des réels par des rationnels*. Même si parfois cela va assez loin et participe à notre formation scientifique de fond, il y a là aussi des idées simples pour donner du contenu, du sens à tel ou tel calcul technique et creux sur les inégalités ou les encadrements.

Jean Lefort nous emmène dans un monde très différent, celui du langage, celui de l'ethnolinguistique, à travers une interrogation quelque peu provocatrice *Y a-t-il un naturel après 3 ?* Si ce n'est pas l'œuvre de Dieu comme le prétend Kronecker,

comment l'homme a-t-il mis en place les entiers naturels, quels ont été les statuts de 0, de 1, de 2 ?

Les quelques activités liées aux codes correcteurs et à la cryptographie de Robert Rolland permettront de comprendre comment ces nombreux numéros qui nous identifient (numéro INSEE, carte bancaire, ...) sont protégés par des codes qui détectent la plupart des erreurs de transcription et, pour certains, les corrigent automatiquement. L'auteur nous fait aussi pénétrer dans les secrets de la cryptographie à travers le petit théorème de Fermat et le code RSA. Tout cela à travers une démarche très pédagogique où le lecteur est sans cesse sollicité à agir, tout en étant guidé par un questionnement très éclairant. La première partie de l'article est un rappel de quelques théorèmes et algorithmes classiques de l'arithmétique élémentaire que Robert Rolland sait mettre en perspective avec beaucoup de clarté.

Tous nos textes ne sont pas écrits par des collègues contemporains ! Ainsi vous trouverez l'analyse par Michel Guillemot d'un texte d'un certain Bernelin, élève de Gerbert d'Aurillac, savant et pape de l'an mil. Il y décrit un abaque de ce dernier pour faire des divisions simples.

La suite dans le prochain numéro !

Daniel REISZ

L'ARITHMÉTIQUE DANS LES BROCHURES DE L'APMEP

(les prix indiqués sont les prix adhérents)

- N° 129. **ARITHMÉTIQUE ...**, par Mathieu Savin (octobre 2000) (cf. texte de Daniel REISZ ci-dessus). 120 pages. **45 F.**
- N° 92. **PROBLÈMES DE L'APMEP : Volume 1 (1993). ARITHMÉTIQUE ET THÉORIE DES NOMBRES.** 152 pages. **70 F.**
Les trois volumes de problèmes ensemble (Arithmétique. Géométrie. Combinatoire, algèbre, analyse), en promotion : **120 F** (cf. page 131).
- N° 86. **QUADRATURE DU CERCLE, FONCTIONS CONTINUES, ...** (les nombres irrationnels et transcendants aux 18^e et 19^e siècles), par Michel Serfati. 202 pages. **80 F.**