

# Mathématiques et voiles de bateaux

## - Deuxième partie -

Frédéric Muttin(\*)

L'objectif de cette partie est de présenter le calcul des voiles et de leur gréement. On précisera les modèles mécaniques nécessaires en référence au modèle 3D présenté dans la première partie. La méthode de résolution actuellement la mieux adaptée sera ensuite décrite sur la base de la présentation effectuée dans la première partie. On abordera enfin l'analyse des résultats et leur utilisation pour concevoir des voiles performantes.

### 1. Vocabulaire nautique et objectifs de l'étude

Nous allons tout d'abord présenter le vocabulaire nautique nécessaire. Un voilier, tel qu'un « 12 mètres J.I. », est équipé de deux voiles triangulaires : un génois à l'avant et une grand-voile à l'arrière (voir fig. 1). Ce sont des parties membranaires, constituées de matériaux textiles. Ces voiles sont hissées sur le gréement à l'aide de câbles, les drisses, et sont maintenues à l'arrière par des écoutes. Le génois est hissé sur un câble prétendu, l'étai. La grand-voile est hissée sur le mât, et est tendue à l'arrière sur la bôme. La grand-voile est munie sur son bord libre de lattes, pour maintenir la partie bombée de celui-ci.

Les voiles sont soumises à trois types de chargement, qui s'exercent simultanément :

- un champ de pression  $\varphi_1$  dû à l'effort du vent,
- un champ de tension d'attachement  $\varphi_2$  sur les bords des voiles couissant sur le gréement,
- des forces ponctuelles  $\varphi_3$  au niveau des points d'attache des écoutes et des drisses.

Les matériaux constituant les voiles sont par conséquent soumis à des tensions internes, qui contrebalancent les efforts appliqués. L'état de contrainte d'un textile à un endroit donné, se caractérise par les vecteurs propres  $\vec{U}_1$ ,  $\vec{U}_2$ , et les valeurs propres  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  du tenseur des contraintes. La connaissance de l'état de contrainte (efforts internes), ainsi détaillée, a été l'objectif majeur de notre étude. En effet, la

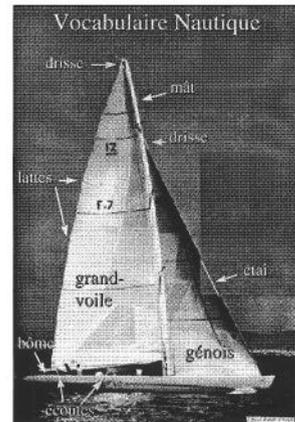


Fig. 1 :  
les voiles et leur gréement  
sur un « 12 mètres J.I. »

(\*) École d'Ingénieurs en Génie des Systèmes Industriels  
26, rue de Vaux-de-Foletier-17000 La Rochelle, France  
Mél : muttin@eigsi.fr

connaissance des directions des efforts internes, caractérisées par  $\vec{U}_1$  et  $\vec{U}_2$ , permet de disposer au mieux sur la voile les matériaux textiles en alignant leurs fibres suivants  $\vec{U}_1$  et  $\vec{U}_2$ . D'autre part, les intensités des efforts internes, caractérisées par  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ , doivent être compatibles avec la résistance des fibres textiles utilisées.

## 2. L'équilibre mécanique d'une voile

Nous allons maintenant présenter les quantités qui permettent d'écrire le modèle physique du comportement d'une voile, en commençant par sa partie membranaire, puis sa partie « câble », et enfin sa partie « poutre ». La géométrie d'une membrane, telle qu'une voile, est représentée par une

fonction  $\vec{m}$  de deux variables  $x$  et  $y$ . À tout point  $(x,y)$  de l'ensemble de départ correspond un point  $\vec{m}(x,y)$  sur la voile. La courbe décrite par  $\vec{m}(x_0,y)$ , avec  $x_0$  fixé et  $y$  variable, tout comme la courbe décrite par  $\vec{m}(x,y_0)$ , avec  $y_0$  fixé et  $x$  variable, s'appellent les lignes de coordonnées passant par le point  $\vec{m}(x_0,y_0)$ . Les vecteurs  $\vec{t}_1 = \frac{\partial \vec{m}}{\partial x}(x_0,y_0)$  et  $\vec{t}_2 = \frac{\partial \vec{m}}{\partial y}(x_0,y_0)$  définissent les tangentes aux lignes de coordonnées passant par  $\vec{m}(x_0,y_0)$  (voir fig. 2).

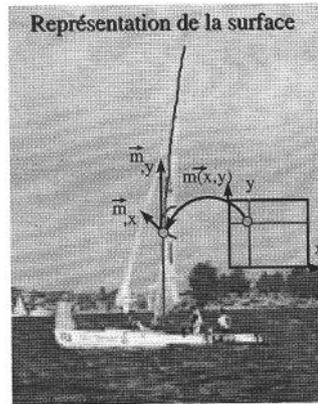


Fig. 2 : Les tangentes aux lignes de coordonnées d'une surface

Soit  $\vec{u}(x,y)$  le champ de déplacement de la voile. Le point initialement en  $\vec{m}(x,y)$  est désormais en  $(\vec{m} + \vec{u})(x,y)$ . La déformation des fibres textiles en ce point est caractérisée par le tenseur des déformations  $\epsilon(x,y)$  défini par :

$$\epsilon(x,y) = \frac{1}{2} \left( \begin{bmatrix} \tilde{t}_1 \cdot \tilde{t}_1 & \tilde{t}_1 \cdot \tilde{t}_2 \\ \text{sym} & \tilde{t}_2 \cdot \tilde{t}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t_1 \cdot t_1 & t_1 \cdot t_2 \\ \text{sym} & t_2 \cdot t_2 \end{bmatrix} \right) \quad (1)$$

où  $\tilde{t}_1 = \frac{\partial (\vec{m} + \vec{u})}{\partial x}$  et  $\tilde{t}_2 = \frac{\partial (\vec{m} + \vec{u})}{\partial y}$  sont les vecteurs tangents aux lignes de

coordonnées de la membrane après déplacement. Le tenseur des contraintes et l'équation d'équilibre de la membrane peuvent ensuite être déduits, à partir des équations de l'élasticité tridimensionnelle exposées dans la première partie.

Les parties « câble » du gréement d'une voile (écoute, drisse) ont pour équation d'équilibre, l'équation différentielle du premier ordre suivante :

$$\frac{d\vec{T}(u(x))}{dx} = \vec{\varphi} \quad (2)$$

Le vecteur  $\vec{T}$  représente la tension du câble au point d'abscisse  $x$ , dont le déplacement est donné par la fonction  $u(x)$ . Le vecteur  $\vec{\varphi}$  représente le champ de force appliquée au câble. L'équation (2) est non linéaire, car la dépendance de  $\vec{T}$  en fonction de  $u$  est non linéaire. L'équation (2) peut se voir comme la version 1D de l'équation d'équilibre 3D : «  $\text{div } \sigma = \varphi$  » où  $\vec{T}$  joue le rôle du tenseur  $\sigma$ , et  $\frac{d}{dx}$  celui de l'opérateur  $\text{div}$ .

Les parties « poutre » du gréement d'une voile (mât, bôme, lattes) ont pour équation d'équilibre, l'équation différentielle linéaire du quatrième ordre suivante :

$$k \frac{d^4 u(x)}{dx^4} = \vec{\varphi} \quad (3)$$

où  $u$  est le déplacement transversal du point d'abscisse  $x$  de la poutre,  $\vec{\varphi}$  est l'effort transversal appliqué, et où  $k$  est une constante dépendante de la géométrie et du matériau de la poutre.

### 3. La résolution de l'équation des voiles

La résolution conjointe de l'équation d'équilibre des parties membranaires, « câbles » et « poutres », d'une voile, est effectuée avec la méthode des éléments finis, décrite dans la première partie. Le champ de déplacement  $u(x)$  est cherché comme une interpolation sur un maillage,

de valeurs nodales  $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N$ ,  $N$  étant le nombre de nœuds. Pour cela on choisit  $N$  fonctions d'interpolation  $\varphi^i$ , continues, valant 1 au nœud numéro  $i$ , et 0 aux autres nœuds. L'interpolation est donnée par la fonction  $u_h$  définie par :

$$\vec{u}(x, y) = \vec{u}_h(x, y) = \sum_{i=1}^N \varphi^i(x, y) \vec{u}_i \quad (4)$$

L'approximation  $\vec{u}_h$  de  $\vec{u}$  est ainsi définie par un nombre fini de paramètres, les déplacements  $\vec{u}_i$  des nœuds du maillage (voir fig. 3). Ce sont les nouvelles inconnues du problème.

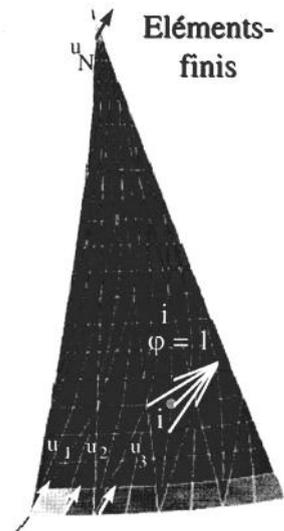


Fig 3 : Un maillage éléments finis d'un génois

L'équation d'équilibre d'une voile et de son gréement peut s'écrire sous la forme suivante :

$$a(U_N, V_N) = l(V_N) \quad \forall V_N \quad (5)$$

où  $a$  est l'opérateur d'énergie de déformation interne,  $l$  l'opérateur d'énergie potentielle des efforts externes,  $U_N = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_N)$  l'inconnue du problème et

$V_N = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_N)$  un champ de déplacement virtuel. Cette relation, étant linéaire en  $V_N$ , s'écrit de manière équivalente :

$$F_{\text{int}}(U_N) \bullet V_N = F_{\text{ext}} \bullet V_N \quad \forall V_N \quad (6)$$

Le vecteur  $F_{\text{int}}$  s'interprète comme les efforts résultants des tensions du matériau aux nœuds du maillage, tandis que  $F_{\text{ext}}$  s'interprète comme la concentration aux nœuds du maillage des efforts appliqués. Après simplification par  $V_N$ , il résulte l'équation d'équilibre suivante :

$$F_{\text{int}}(U_N) = F_{\text{ext}} \quad (7)$$

Notons que  $F_{\text{int}}$  dépend non linéairement du déplacement  $U_N$  des nœuds du maillage.

L'équation (7) (système d'équations non linéaires) est résolue par la méthode de Newton, dont le principe est schématisé sur la figure n° 4.

La méthode de Newton est une méthode itérative. Elle consiste à déterminer la solution d'une équation non linéaire, en cherchant la limite d'une suite, issue d'un point de départ, comprenant les solutions enchaînées de l'équation linéarisée. La linéarisation de l'équation (7) s'écrit avec la dérivée  $F'_{\text{int}}(U_N)$ .

#### 4. Quelques visualisations

À l'occasion du calcul d'un spinnaker, nous avons représenté la géométrie de la voile et l'intensité de la contrainte maximale  $\lambda_1$ , après chaque itération de la méthode de Newton. Cette suite d'états, qui ne correspondent pas à un comportement de la voile au cours du temps (comportement dynamique), et qui correspond à des états « numériques » de la voile, est représentée dans le film suivant :

#### Résolution par la méthode de Newton

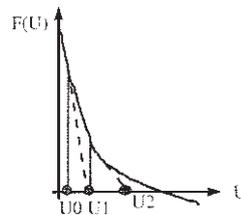
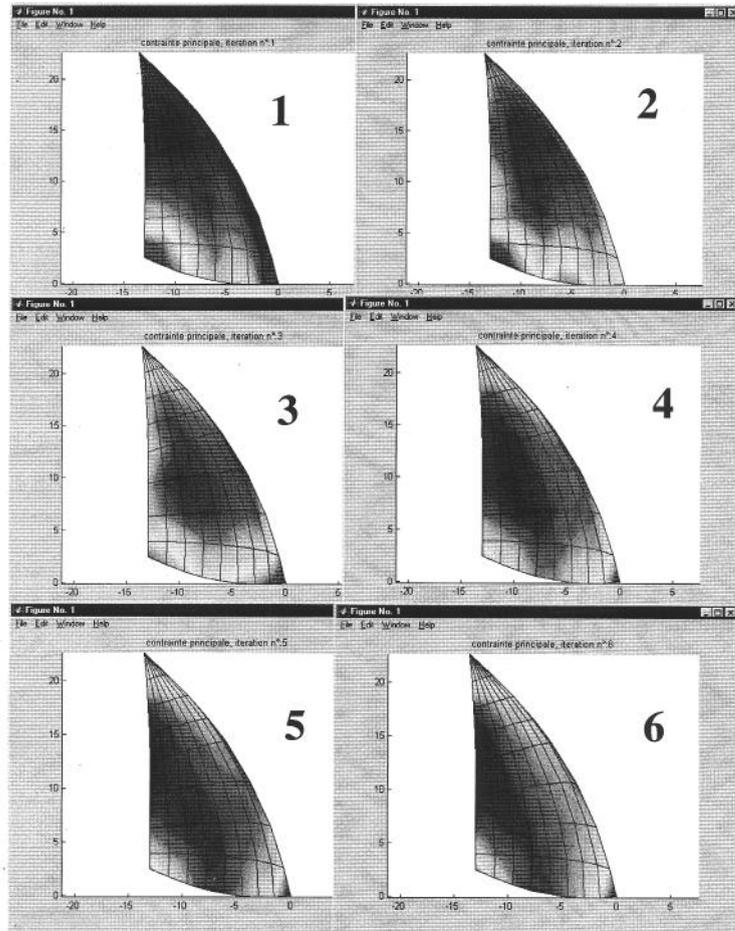


Fig. 4 : Principe de la méthode de Newton



Film 1 : L'état de contrainte dans un spinnaker après chaque itération de la méthode de Newton

La figure suivante représente l'intensité de la contrainte maximale  $\lambda_1$  dans le tissu d'un génois de « 12 m. J.I. ». Nous constatons l'intensité particulière des efforts aux trois coins de la voile. Cette intensité est utilisée dans la conception de la voile, par exemple pour connaître le nombre d'épaisseurs de tissu nécessaires, pour parvenir à maintenir la déformation des fibres textiles en deçà d'une certaine limite.

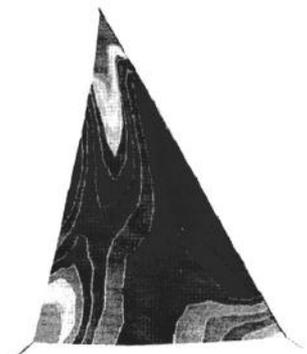


Fig. 5 : L'intensité de la contrainte principale  $\lambda_1$  dans un génois.

Au cours de l'histoire des mathématiques appliquées, Jean Bernoulli 1667-1748, [Mehl] a étudié la mécanique des voiles dans son ouvrage intitulé « Nouvelle théorie de la manœuvre des vaisseaux » [Sonnet]. Il soulignait la difficulté du problème due à la géométrie des voiles. Pour évaluer la propulsion des vaisseaux, les voiles étaient supposées planes.



## 5. Conclusion

La méthode décrite permet de résoudre un problème concret. Il s'agissait à l'occasion de la coupe de l'America 1987 de gagner une course à la voile. Cette méthode a permis à l'industrie nautique de progresser dans la fabrication des voiles destinées à la plaisance, dont les coupes sont désormais triradiales.

La méthode décrite a également permis de faire progresser la sécurité du transport automobile avec le calcul des systèmes airbags. Elle pourrait également permettre d'améliorer la protection de l'environnement lors des marées noires, en calculant les barrages antipollution.

## Références

MEHL S. , <http://chronomat.irem.univ-mrs.fr/chronomat/BernoulliJean.html>

SONNET H., *Dictionnaire des Mathématiques Appliquées*, Hachette, Paris, 1895.