Pratique de l'arithmétique dans un document cadastral de la fin du XVe siècle de la région d'Ajaccio

René Lozi

Le document dont il est question ici a été découvert dans les Archives de Gênes où se trouvent une bonne part des archives médiévales de la Corse, par Jean-A. Cancellieri, professeur à l'université de Corte. Monique Zerner, professeur à l'université de Nice-Sophia Antipolis, l'a retranscrit (car il est difficilement lisible), puis traduit en français. Une analyse pluridisciplinaire nous a conduit à publier quelques réflexions(1) à son sujet, que je vais développer en y ajoutant des pistes pour une éventuelle utilisation pédagogique au Collège et au Lycée.

1. Un document cadastral

Le document original(2), sa transcription et sa traduction sont présentés en Annexe II.

Il s'agit d'un texte isolé, anonyme, datable de 1494-1495, concernant la région d'Ajaccio qui semble appartenir à un projet de « cadastration » ou d'allotissement génois. Il n'a rien de commun avec les cadastres de 1414 du Comtat Venaissin étudiés dans la thèse de M. Zerner, qui sont en fait des livres d'estime, ni avec les compoix provençaux de la fin du XIVe ou du XVe siècles étudiés par N. Coulet, L. Stouf ou M. Hébert et les « cadastres » qui leur font suite aux XVIe, XVIIe et XVIIIe siècles(3). On ne peut pas le rapprocher non plus de certains « catasti » italiens, comme ceux de Massa étudiés par F. Leverotti(4), qui portent la trace d'une tentative de cadastration moderne au sens ou les descriptions s'accompagnent dans la marge d'un schéma de

(1) M. Zerner, R. Lozi, J.-A. Cancellieri, *Quelques réflexions inspirées par un document cadastral de la fin du XVème siècle. Pratique de l'arithmétique et mesure de la terre*. Histoire & Mesure, 1993, VIII-3/4, p. 295-312.

(2) Archivio di Stato di Genova, San Giorgio, Primi cancellieri, busta 5, nº 517. Publié par J.-A. Cancellieri dans *Ajaccio 1492 : naissance d'une ville génoise en Corse*, CRDP, 1992, texte 11, p. 27-30.

(3) M. Zerner, *Le cadastre, le pouvoir et la terre. Le comtat Venaissin pontifical au début du XVème siècle*, Collection de l'École française de Rome, 174, 1993.
L. Stouff, *Arles à la fin du Moyen Age*, Aix-en-Provence, PUP, 1986.
M. Hébert, *Tarascon au XIVème siècle*, Édisud, 1979.
Contributions des historiens du Midi au colloque sur *Les cadastres anciens des villes et leur traitement par l'informatique*, Actes de la table ronde organisée par le centre d'histoire urbaine de l'École normale supérieure de Saint-Cloud avec la collaboration de l'École Française de Rome et du C.N.R.S. (Saint-Cloud, 31 janvier-2 février 1985), collection de l'École française de Rome, 120, 1989.

(4) F. Leverotti, *Massa di Lunigiana alle fine del trecento,* Pisa, 1982.

l'agencement des parcelles car le problème dans ce texte n'est pas de faire un plan des parcelles, mais de mesurer leur superficie. Ce problème est résolu ainsi que nous allons le voir, de façon abstraite en posant des opérations à partir de la mesure de la longueur des côtés et non à partir du coup d'œil de l'arpenteur qui estime l'aire.

1.1. Le contexte historique

Si l'auteur est inconnu, ce n'est pas le cas des destinataires de ce document qui sont Lodisio de Bervei et Matteo Grimaldi (Annexe II), respectivement ancien et nouveau lieutenants génois de l'Au delà des Monts de la Corse (le sud-ouest de l'île), en poste à Ajaccio autour de 1494, ville coloniale nouvellement fondée par l'Office de Saint-Georges en 1492.

L'histoire de la Corse a toujours été complexe. Nous renvoyons au livre de P. Arrighi et F. Pomponi pour en donner un bref aperçu(5). Du XII^{e} au XV^{e} siècles elle a été principalement marquée par la rivalité entre Pise et Gênes pour sa colonisation. Au cours de cette période, Gênes s'installe d'abord à Bonifacio puis à Calvi et évince peu à peu Pise. Les représentants des communautés d'En deçà des Monts se réunissent à Biguglia en 1453 et négocient avec l'Office de Saint-Georges les *Capitula Corsorum*.

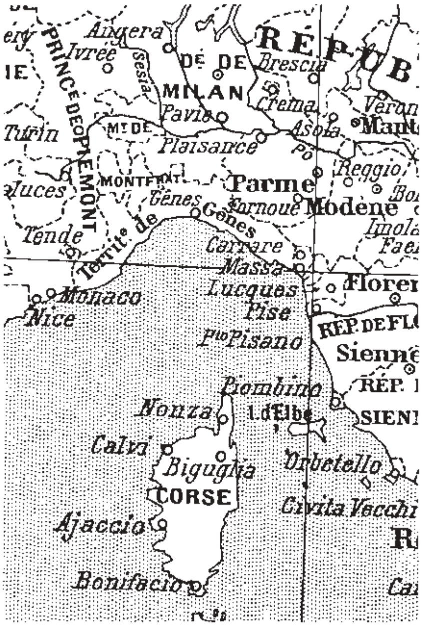


Figure 1. L'Italie en 1494 (Larousse du XX^{e} siècle)

L'Office de Saint-Georges gérait les créances de la République de Gênes et était devenu un État dans l'État. La prise de possession de la Corse par Gênes ne fut que temporairement freinée par des dissensions internes de la république et par la guerre avec Milan, mais en 1483 l'Office de Saint-Georges reprenait possession complète de l'île jusqu'en 1562 (la Figure 1 indique la complexité de la géographie humaine de l'Italie en 1494).

Souhaitant établir un nouveau point d'appui maritime entre Calvi et Bonifacio, les Génois choisirent au XII^{e} siècle le site d'Ajaccio pour édifier une petite place forte, le Castel Lombardo ou Castel Vecchio (Ancien Château dans le document) dont il ne reste rien aujourd'hui. Son emplacement se situait au-dessus de la gare actuelle (Fig. 2).

Pour des raisons de salubrité liées au paludisme (voir plus loin le nom de *Padules*), ce site fut abandonné au XV^{e} siècle et en 1492 le promontoire rocheux du

(5) P.Arrighi, F. Pomponi, *Histoire de la Corse*, Collection Que sais-je ?, n° 262, P.U.F., 1997.

capo di Bollo sur la pointe de la Leccia fut choisi pour l'implantation d'une ville nouvelle. Une centaine de familles génoises et ligures parmi lesquelles figuraient les Bonaparte fut alors envoyée pour en assurer le peuplement(6).

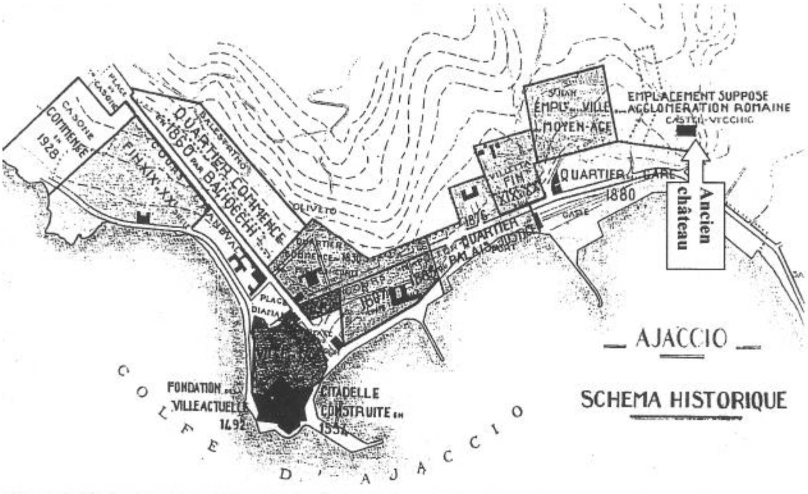


Figure 2. Plan historique d'Ajaccio.

1.2 Analyse du texte

Dans les sources d'archives, comme d'ailleurs dans la bibliographie régionale(7), on mesure le rôle privilégié que jouèrent les Lombards et accessoirement les Piémontais dans l'aménagement de la nouvelle cité et de son finage, du haut en bas de la pyramide de métiers du bâtiment et de l'arpentage. Les deux premiers ingénieurs militaires et architectes en chef venaient eux-mêmes du duché de Milan (Fig. 1) : Cristoforo de Gandino (1491-1492) de la région de Bergame et Pietro de Mortara (après 1492) de la région de Vigevano.

Depuis le lointain XIIIe siècle, mais désormais dans un regain décisif d'actualité, l'excellence des Lombards dans l'art de bâtir, de labourer, de drainer ou d'irriguer, apparaissait en adéquation privilégiée avec un projet de peuplement stratégique et d'exploitation des virtualités céréalières des basses vallées des rivières Gravona et Prunelli (Fig. 3).

On peut ainsi attribuer de manière très plausible ce rapport sur une cadastration de terrains agricoles près d'Ajaccio très peu de temps après l'acte de fondation de la ville, soit à Pietro de Mortara lui-même, soit à l'un de ses géomètres ou arpenteurs qui se livre ici à un exercice théorique dans sa forme mais destiné à recevoir une application concrète.

(6) http://www.napoleon.org/fr/ci/iti/corse/corse.html

(7) Jérôme Campi, *Notes et documents sur la ville d'Ajaccio de 1492 à 1789*, Ajaccio, 1901 ; Carlo Bornate, « La Corsica verso la fine del secolo XV : la costruzione di Ajaccio », *Archivio di Corsica*, VIII (1932) ; Antoine-Marie Graziani, « 1492 », *Histoire d'Ajaccio* (collectif), Ajaccio, 1992.

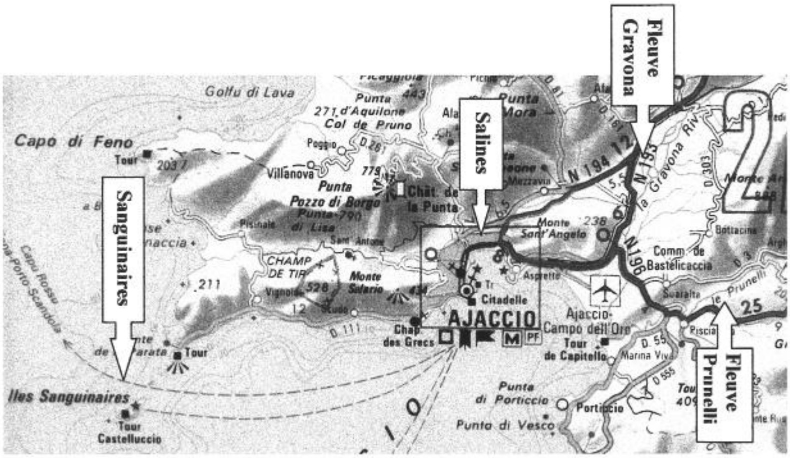


Figure 3. Carte des environs d'Ajaccio.

Si le style est répétitif, si la démarche est souvent élémentaire, si le document est en latin, il n'y a rien sans doute là qui témoigne d'une véritable difficulté d'intercompréhension linguistique entre Lombards et Génois. À la fin du XVe siècle, les relations sont particulièrement enracinées et denses entre les deux communautés, sous le signe des Sforza, comme l'a montré depuis longtemps Jacques Heers(8).

1.2.1 Deux terrains vers les Sanguinaires

Dans le document, il est question de sept terrains que pour des raisons de commodité nous désignerons par $\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_2}$, …, $\mathbf{T_7}$. Le but de l'auteur de ce rapport est de rappeler qu'on a promis de lui attribuer une superficie totale de un million de godia carrés, la moitié vers les Sanguinaires (Fig. 3), l'autre moitié en divers autres lieux autour d'Ajaccio.

Cinq terrains lui ont déjà été attribués ($\mathbf{T_1}$, $\mathbf{T_3}$, $\mathbf{T_4}$, $\mathbf{T_5}$, $\mathbf{T_6}$), il en reste deux autres ($\mathbf{T_2}$ et $\mathbf{T_7}$), dont il calcule les dimensions par une suite d'opérations que nous allons examiner.

Dans la *partie 1*, l'auteur indique que le terrain $\mathbf{T_1}$ a une longueur de 634 godia et une largeur de 459. Il sous-entend que $\mathbf{T_1}$ peut être assimilé à un rectangle, puisqu'il en calcule l'aire en multipliant 459 par 634.

Le besoin de préciser à cinq reprises (indiquées par les flèches numérotées de 1 à 5 dans l'Annexe II) que le « **godium carré** » est une pièce de 1 godium de long sur 1 godium de large, prouve que l'élévation au carré de cette mesure propre à Gênes et qui faisait partie du vocabulaire maritime, était chose bien inhabituelle à cette date et dans ce contexte. Le *godium* (pluriel : *godia*, en génois : *goa*) était une mesure à l'origine purement navale mais utilisée aussi pour calculer les surfaces foncières ; elle valait 3 palmi, soit 0,741 mètre(9).

(8) Jacques Heers, *Gênes au XVe siècle : activité économique et problèmes sociaux*, Paris. 1961, et depuis, *passim*.

(9) P. Rocca, *Pesi e misure antiche di Genova e del Genovesato*, Gênes, 1871, p. 59.

Nous sommes au début de l'acquisition d'une mesure de superficie en rapport avec une mesure de longueur concrète, qui bouleversa les pratiques comptables. Il faudra la Révolution de 1789, en l'occurrence une révolution de ce qu'on peut appeler avec Jack Goody « la raison graphique(10) », pour que pareille notion s'impose.

Dans la *partie 2*, l'auteur explique longuement que la moitié d'un million de godia carrés vaut 500 000 godia carré. Cette notion qui actuellement est du niveau de fin de cycle 3 (cycle des approfondissements) à l'école primaire ne semble pas facile à faire comprendre à un lecteur en 1494 puisque l'auteur non content de poser la multiplication de 500 par 1 000, y revient dessus et explique ce résultat à la *partie 14* à l'aide d'une figure.

Dans la *partie 3*, il obtient par soustraction l'aire du terrain $\mathbf{T_2}$ qui doit lui revenir (208 994 godia carrés) et, supposant que ce terrain soit un carré, vérifie (*partie 4*) qu'il devrait avoir un côté de 457 godia. Rien n'est dit sur la façon d'obtenir la racine carrée de 208 994, alors que le livre de vulgarisation de mathématiques « Compendion de l'Abaco » du niçois Frances Pellos, publié en 1492 à Turin (Nice faisait alors partie de la principauté du Piémont, cf. Fig. 1) expose la méthode encore employée actuellement.

1.2.2. Cinq terrains du vieux château au fleuve Gravona

Des cinq terrains suivants, quatre ont déjà été attribués à l'auteur en divers points plus à l'est d'Ajaccio. Il faut noter la logique du manuscrit qui décrit les terrains de $\mathbf{T_1}$ à $\mathbf{T_7}$ d'ouest en est, des environs des îles sanguinaires aux rives de la Gravona en passant par le vieux château (Fig. 2 et 3). Tout d'abord vers l'ancien château, aux Padules (ce qui signifie zone marécageuse) le terrain rectangulaire $\mathbf{T_3}$ de 1 101 godia de long sur 100 godia de large (*partie 5*), le terrain $\mathbf{T_4}$ ayant la forme d'un quadrilatère quelconque de 350, 210, 233, 266 godia de côtés auquel l'auteur attribue une superficie de 69 696 godia carrés (*partie 6*).

Nous examinerons en détails au § 3 ce calcul d'aire ainsi que celui de $\mathbf{T_6}$.

À proximité de ces deux terrains, vers Arbaghjolu, $\mathbf{T_5}$ est décrit comme un rectangle de 429 godia de long sur 100 de large (*partie 7*), vers les Salines (Fig. 3) au lieu-dit Cardellu, $\mathbf{T_6}$ possède les dimensions suivantes : 352, 224, 224, 224 godia de côté (*partie 8*). L'auteur en déduit une aire de 65 536 godia carrés (*partie 9*).

Ces quatre terrains présentent donc une superficie totale de 288 232 godia carrés (*partie 10*). Il reste ainsi à assigner vers la Gravona 211 768 godia carrés (*partie 11*) qui représentent approximativement un terrain carré $\mathbf{T_7}$ de 460 godia de côté (*partie 12*).

À la *partie 13*, une récapitulation de la requête rappelle les caractéristiques des terrains $\mathbf{T_2}$ et $\mathbf{T_7}$ qu'on doit lui attribuer.

(10) Jack. Goody, *La raison graphique*, Les éditions de minuit, 1979.

2. L'écriture des chiffres et les opérations arithmétiques

2.1. L'écriture des chiffres et des nombres

Il est assez facile de reconnaître les chiffres et les opérations effectuées dans ce texte car il y a peu de différences avec l'écriture actuelle. Les chiffres utilisés correspondent à ceux qu'on trouve dans les livres ou autres manuscrits de la fin du XV^{e} siècle, à l'exception du chiffre 5 qui a ici une forme plus archaïque. On trouve en effet cette graphie plutôt dans des textes des XII^{e} et XIII^{e} siècles comme le traité *de Algorithmo* de Johannes de Sacro Bosco (~1195 – 1256) ou les œuvres de Roger Bacon (1214-1292) célèbres mathématiciens d'Oxford au Moyen-Âge (Fig. 4a, lignes 4 et 5), ou même les différentes versions de l'*Algorisme* (Fig. 4b, c) écrits un siècle auparavant.

Figure 4a. Montucla,
Histoire des mathématiques, 1758

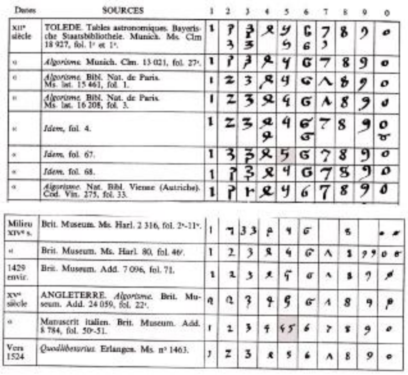


Figure 4b. G. Ifrah,
Histoire universelle des chiffres,
graphies de chiffres

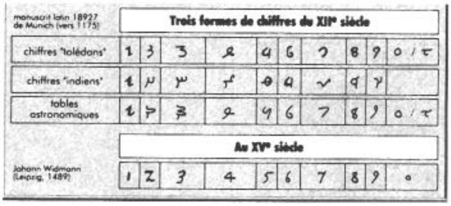


Figure 4c. A. Allard,
La révolution arithmétique du moyen âge,
graphies de chiffres

Figure 4d. F. Pellos,
Compendium de l'Abaco, Turin, 1492,
page de garde, graphies de chiffres

Sauf cas rare (Fig. 4b, ligne 13) les textes du XV^{e} siècle utilisent la graphie actuelle (Fig. 4c, d) qui est cependant déjà attestée au XII^{e} siècle (Fig. 4b, ligne 6).

Par contre les autres chiffres sont résolument plus modernes. Il ne faut pas oublier que l'invention de l'imprimerie à caractères mobiles date du milieu du XV^{e} siècle et qu'elle contribuera ensuite à stabiliser la forme des chiffres. Nous renvoyons à G. Ifrah(11) et à A. Allard(12) pour une présentation approfondie de l'évolution des chiffres indo-arabes en Occident.

(11) G. Ifrah, *Histoire Universelle des Chiffres*, éd. Seghers, Paris 1981.

(12) A. Allard, *La révolution arithmétique du Moyen-âge*, La Recherche n° 278, Juillet-Août 1995, p.742-748.

Les nombres utilisés dans le manuscrit sont tous des nombres entiers, exception faite de 264 $\frac{3}{4}$ (*partie 6*) que l'on pourrait considérer comme une fraction (bien connue à cette époque[(13)]), si elle n'apparaissait pas en réalité sous la forme 0264 $\frac{3}{4}$ résultat de la division de 1059 par 4, et si elle était élevée au carré alors que l'auteur n'en élève que la partie entière c'est-à-dire 264, faisant ainsi une approximation par défaut plus mauvaise que l'approximation par excès (notons que dans le contexte, le requérant a intérêt à minorer la superficie du terrain $\mathbf{T_4}$ qu'on lui a déjà attribué).

2.2. Additions, soustractions

Dans ce manuscrit figurent explicitement quinze opérations arithmétiques qui sont : une addition isolée, deux additions suivies de deux divisions par 4, deux soustractions et huit multiplications. En outre, l'auteur utilise les résultats de deux extractions de racines carrées sans expliquer comment il les obtient. Toutes les opérations sont effectuées suivant des règles connues à l'époque, qui sont très proches des techniques opératoires en usage aujourd'hui en Europe. Comme il est d'usage au XV^{e} siècle, il n'y a pas d'indication du symbole opératoire ce qui signifie que le contexte ou le résultat doivent indiquer la nature de l'opération.

Dans les additions et les soustractions, il n'y a pas de retenue indiquée, ce qui est également classique. Toutes les opérations sont exactes.

2.3. Multiplications

Les huit multiplications sont effectuées suivant les règles de calcul « à l'italienne ». Ce sont ces règles que nous appliquons de nos jours, toutefois c'est le nombre figurant sur la rangée du haut qui sert à multiplier le nombre de la rangée du dessous, contrairement à ce que nous apprenons aujourd'hui à l'école. Observons dans la *partie 1* la multiplication de 459 par 634, elle est effectuée ainsi :

$$
\begin{array}{r@{\qquad}l@{\qquad}l}
4\,5\,9 & & \\
\underline{6\,3\,4} & & \\
5\,7\,0\,6 & \Leftarrow 6\,3\,4 \times 9 & \text{(9 unités)} \\
3\,1\,7\,0 & \Leftarrow 6\,3\,4 \times 5 & \text{(5 dizaines)} \\
\underline{2\,5\,3\,6} & \Leftarrow 6\,3\,4 \times 4 & \text{(4 centaines)} \\
2\,9\,1\,0\,0\,6 & &
\end{array}
$$

Il n'y a pas de retenue indiquée, on se servait sans doute des doigts. L'utilisation de la numération sur les doigts est très présente à cette époque (Figure 5) peut-être en raison de la relative rareté des supports d'écriture. En outre le contexte éducatif était différent et peu de personnes connaissaient par cœur les tables de multiplication.

(13) François Pellos, *Compendium de l'Abaco*, première édition à Turin par Nicolas Benedetti et Jacobino Suigo de Sancto Germano, 1492 (à la Bibliothèque Municipale de Nice), seconde édition dans la *Revue des Langues Romanes*, 1967.

Cette connaissance est même souvent considérée comme une performance jusqu'au XVI^e siècle[14] (seul un enseignement obligatoire étalé sur plusieurs années nous permet de les maîtriser aujourd'hui). On a souvent recours aux doigts de la main non seulement pour faciliter la mémorisation des reports de retenues, mais également pour obtenir les produits des tables d'opération au-delà de 5 fois 5 suivant une méthode ingénieuse que nous n'avons pas la place d'expliquer ici (voir G. Ifrah). Cette méthode porte différents noms (en particulier *regula pigri* : règle du paresseux).

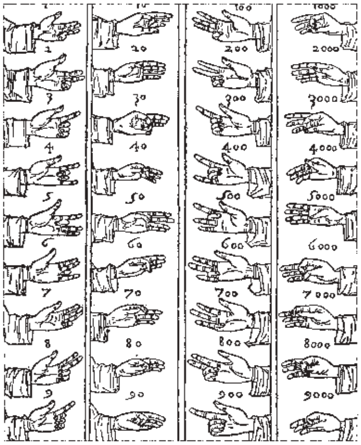


Figure 5. A.Allard, *document tiré de la* Summa arithmetica *de Luca Paccioli*, représentation des nombres de 1 à 9 999 sur les doigts des mains gauche et droite.

On utilise aussi la méthode ingénieuse suivante (on veut par exemple obtenir $8 \times 7 = 56$) :

$$\begin{array}{cc} 8 & 2\ (= 10 - 8) \\ & \downarrow \times \\ \underline{7} & \underline{3\ (= 10 - 7)} \\ 5 & 6 \\ (= 8 - 3 = 7 - 2) & (= 2 \times 3) \end{array}$$

Elle est expliquée dans *Grounde of Artes* de Robert Recorde (1510-1558), fondateur de l'école mathématique de Cambridge[15].

Il est à noter que l'on utilise les doigts des mains depuis le haut moyen-âge pour effectuer des calculs bien plus sophistiqués que des multiplications. Ainsi Bède le Vénérable, auteur anglo-saxon du VII^e siècle, décrit succinctement dans le *De temporum ratione* une méthode de calcul de la date de Pâques sur les jointures des doigts et les ongles[16] (voir Annexe I).

2.3.1. Diverses techniques multiplicatives

En cette seconde moitié du XV^e siècle, nombreux sont les livres d'arithmétiques destinés à un public assez large qui sont publiés. Nous avons déjà mentionné le *Compendion de l'Abaco* du niçois Frances Pellos (1492), premier livre de mathématiques en langue d'oc, mais on peut également citer en autres : la *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* terminée à Pérouse et publiée

(14) R. Taton, Le calcul mental, Collection Ques sais-je ? nº 605, P.U.F., 1070.

(15) http://www.maths.ox.ac.uk/about/history

(16) J.-G. Lemoine, *Les anciens procédés de calcul sur les doigts en Orient et en Occident*, Revue des études islamiques, cahier I, p. 1 - 58, 1932.

à Venise en 1494 de Luca Paccioli (1445 – 1514) ; le *Triparty en la science des nombres* (1484) de Nicolas Chuquet ; l’*arithmétique de Trévise* (1478) d’auteur inconnu, l’*arithmétique* (Venise, 1484) de Pietro Borghi, le *Bamberger Rechenbuch* (1483) écrit en allemand et le *Behende und hubsche Rechnung auf allen Kauffmanschafft* (calcul adroit et raffiné pour tout commerce) plus complet ; le traité d’algèbre de Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780 – 850, savant de l’école de Bagdad dont le nom a donné le mot *algorithme*), traduit en latin en 1464.

Cette profusion d’ouvrages est sans doute due aux nécessités du commerce et au renouveau de l’activité mathématique dans les universités italiennes stimulée par l’effondrement de l’empire byzantin, La chute de Constantinople prise par les Turcs musulmans en 1453 ayant entraîné la fuite vers l’Italie d’un bon nombre de savants emportant avec eux des manuscrits originaux de la civilisation grecque pratiquement inconnus des savants européens.

Dans ces ouvrages les techniques multiplicatives proposées aux lecteurs sont nombreuses. André Allard les analyse en détails (voir note 12). À la figure 6a deux méthodes contemporaines du manuscrit sont proposées par F. Pellos. Celle du haut correspond aux multiplications du document, mais le choix des nombres multipliés nous empêche de savoir quel est le nombre utilisé pour multiplier l’autre. Par contre l’exemple tiré de L. Paccioli (Fig. 6b) indique clairement que c’est le deuxième nombre qui est utilisé pour multiplier celui du dessus. Dans ces deux figures contemporaines du manuscrit, on remarque la graphie moderne du chiffre 5.

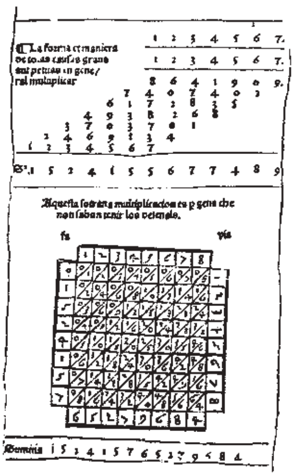


Figure 6a. F. Pellos, *Compendium de l’Abaco*, deux techniques multiplicatives.

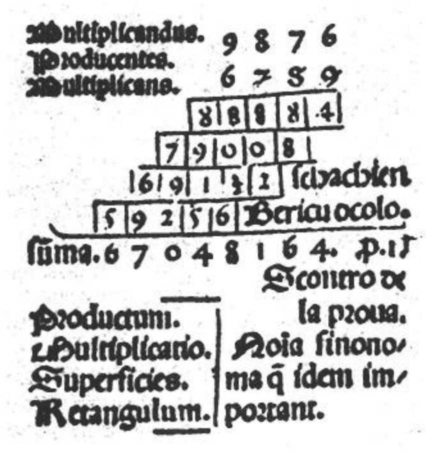


Figure 6b. A.Allard, *document tiré de la* Summa arithmetica *de Luca Paccioli*, méthode de multiplication encore utilisée de nos jours.

La méthode du bas de la figure 6a dite « per gelosia » (pour rappeler les jalousies d’une persienne) ou également « multiplication musulmane » est plus facile à expliquer car chaque diagonale correspond à une puissance de dix différente. Elle est parfois exposée dans les manuels du collège.

On peut la faire découvrir avec profit aux élèves, et si on la transpose dans le cadre d'une multiplication en base 1 000 ou 10 000 au lieu de la base 10 (il faut pour cela connaître les tables de multiplication en base 1 000 ou 10 000, ce que notre cerveau ne peut pas retenir, mais qu'une calculette peut nous donner aisément) elle permet de calculer rapidement des multiplications de très grands nombres qui dépassent la capacité des calculettes.

2.3.2. Les multiplications par 100

Le manuscrit comporte deux multiplications par 100 (1 101 × 100 à la *partie 5* et 429 × 100 à la *partie 7*). Nous avons vu que la technique utilisée dans le texte était bien connue à son époque, aussi on ne peut qu'être surpris de la voir employée pour multiplier par 100 au lieu d'ajouter directement deux zéros (elle est basée sur le fait qu'en base 10, la multiplication d'un nombre par 10 ne requiert que l'adjonction d'un zéro). Il semblerait soit que l'auteur ignorait les fondements de la technique qu'il employait, soit qu'il destinait son texte à un lecteur les ignorant (hypothèse vers laquelle penche J.-A. Cancellieri pour des raisons historiques). Vingt ans plus tôt (en 1478), P.P. Muscarello dans l'*Algorismus*, pose trois multiplications par 100 successives mais donne le résultat sans utiliser de calcul intermédiaire (Fig. 7a, b), ce qui est une forme de calcul un peu plus élaborée que celle du document. Peut-être est-ce parce que dans ce cas il ne s'agit que d'expliquer les étapes pour arriver à 100 à la puissance 4 en rappelant les puissances intermédiaires et non pas de vérifier que le produit par 100 conduit à rajouter deux zéros.

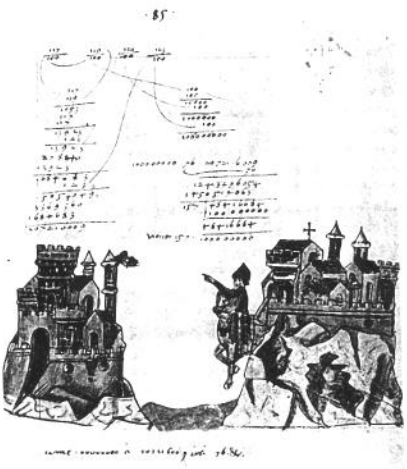


Figure 7a. P. P. Muscarello, *Algorismus*, 1478, trois multiplications par 100

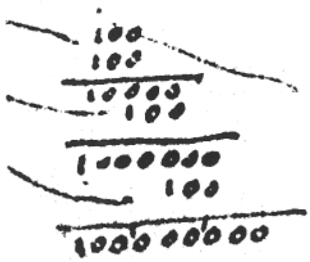


Figure 7b. Agrandissement

Dans le manuscrit une troisième multiplication, celle de 1 000 par 500 à la *partie 2* relève de la même démarche.

2.4. Les divisions

Il reste à examiner les deux divisions par quatre du document (*parties 6 et 8*). Elles sont posées comme chez Pellos dans le cas des divisions par un nombre à un chiffre (Fig. 8a) y compris la fraction 1/4 finale, avec comme seule petite différence la présence d'un 0 devant 264 pour rappeler que 1 divisé par 4 donne 0, ce qui paraît superflu dans le Compendion. De nos jours en Europe on poserait ces opérations différemment, mais aux États-Unis et au Japon c'est une disposition qui ressemble à celle de Pelos qui est utilisée (Fig. 8b), dividende et quotient étant permutés.

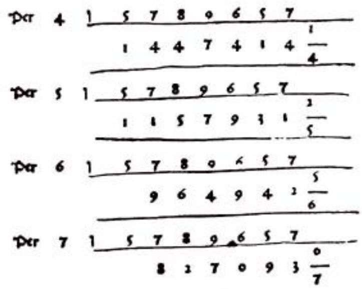


Figure 8a. F. Pellos, *Compendium de l'Abaco*, divisions exactes de 5 789 657 par 4, 5, 6 et 7.

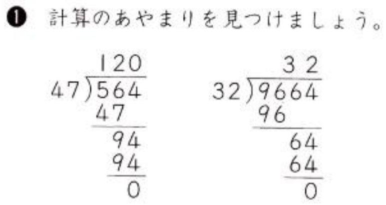


Figure 8b. *Manuel de mathématiques japonaises (CMI)*, divisions exactes de 564 par 47 et de 9 664 par 32.

Pour les divisions par un nombre supérieur à 10, les techniques de cette époque sont différentes et assez compliquées à comprendre. On utilise volontiers la division « en galère » (Fig. 9a, b).

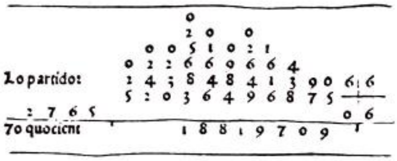


Figure 9a. F. Pellos, *Compendium des Abaco*, division exacte de 52 036 496 875 par 2 765

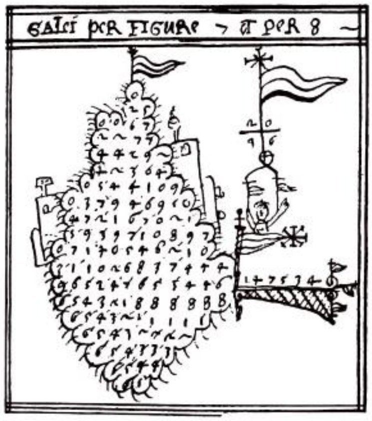


Figure 9b. E. Picutti, *Uomini e numeri, Le Scienze, quaderni 18, 1984*, une division par la méthode de la galère (fin du XV^{e} siècle, Venise)

2.5. Les racines carrées

L'auteur a également besoin, dans les démonstrations qu'il veut faire concernant la taille des deux terrains $\mathbf{T_2}$ et $\mathbf{T_7}$ qui doivent lui être attribués, d'extraire deux racines carrées, celle de 208 994 (*partie 4*) pour laquelle il trouve comme solution approchée par défaut 457 (elle vaut 457,159) et celle de 211 768 (partie 12) pour laquelle il trouve 460 (elle vaut 460,183). Aucune indication de la méthode utilisée n'apparaît. Seule figure les vérifications obtenues en élevant respectivement 457 et 460 au carré.

On ne peut qu'être étonné que ne figurent dans ce document que les techniques opératoires simples (les quatre opérations) et non celle plus complexe de l'extraction de la racine carrée. L'intention de l'auteur était-elle de convaincre un lecteur aux connaissances limitées en lui prouvant la véracité de ses affirmations uniquement par des calculs que celui-ci était à même de comprendre ? Ceci rejoint l'interrogation que nous avons déjà formulée à propos des multiplications par 100.

L'extraction de la racine carrée, technique connue mais complexe à l'époque(17), n'était-elle pas connue de l'auteur et ses résultats n'ont-ils été trouvés que par tâtonnement ? Dans ce cas, il devenait fastidieux d'exposer la démarche suivie. Nous nous perdons en conjectures et seule une étude comparative avec d'autres documents pourrait lever un coin du voile.

3. Aire d'un quadrilatère

Nous venons de voir que tous les calculs effectués dans le document cadastral sont exacts (calcul étant entendu comme résultat d'une opération mathématique). Une seule petite erreur de report de nombre se situe dans la *partie 3* où 291 006 est reporté en 29 100 une seule fois sans que cela nuise à la suite des calculs. Par contre certains de ces calculs reposent sur des bases fausses ainsi que nous allons le montrer.

Le terrain $\mathbf{T_7}$ a la forme d'un quadrilatère quelconque de 350, 210, 233, 266 godia de côtés auquel l'auteur attribue une superficie de 69 696 godia carrés (*partie 6*).

3.1. La méthode utilisée dans le document

La méthode utilisée pour calculer cette aire consiste à calculer la moyenne de ces quatre nombres (d'où la division par 4) et d'assimiler ce quadrilatère à un carré ayant cette longueur moyenne de godia pour côté (une définition de la moyenne est même donnée par l'auteur à la *partie 8* pour $\mathbf{T_6}$).

Cette méthode conduit à un résultat qui est toujours incorrect si deux côtés au moins ont des longueurs différentes, ce qui est le cas ici. Elle est différente de celle préconisée par Pellos, dans ses cinquième et sixième exemples. Ce dernier, en effet, suggère de faire la moyenne des côtés opposés, puis le produit de ces moyennes. Ceci a pour mérite de comparer le quadrilatère à un rectangle plutôt qu'à un carré comme dans le manuscrit et, dans ce cas, de ne pas trop surestimer l'aire du quadrilatère (remarquons que les énoncés de solutions à des problèmes de calcul d'aire, chez Pellos, restent toujours abstraits, puisqu'ils ne sont jamais donnés en unités de longueur ou de superficie).

Contrairement au cas du triangle pour lequel l'aire est déterminée de façon unique par la donnée de la longueur des trois côtés(18), il existe une infinité de quadrilatères d'aires différentes ayant quatre côtés de longueur donnée. Si l'on sait de plus que le quadrilatère considéré est inscrit dans un cercle, la formule attribué à Brahmagupta, mathématicien hindou du VII^{e} siècle, permet de calculer l'aire de ce quadrilatère :

(17) A. Viani, *Étude critique et méthodique d'un ouvrage en moyen provençal : « la compendion de l'abaco » deFrances Pellos (1492)*, thèse, Université de Nice, 1981.

(18) On peut d'ailleurs utiliser la formule de Héron d'Alexandrie :

$$\mathrm{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{avec} \quad p = \frac{a+b+c}{2}$$

où a, b et c représentent les longueurs des trois côtés des triangles.

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \text{ où } p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

a, b, c et d étant les longueurs des côtés.

En général, le quadrilatère n'est pas inscrit dans un cercle, il n'est donc pas unique et l'on doit paramétrer l'aire de la famille de quadrilatères ayant quatre côtés donnés par la longueur d'une de ses diagonales.

Considérons le quadrilatère de la Figure 10, correspondant au terrain $\mathbf{T_4}$ de l'auteur. On suppose raisonnablement que les quatre côtés ont les longueurs données dans un ordre consécutif par le manuscrit et que le quadrilatère est convexe. En appelant x la longueur de la diagonale DB, la formule de Héron(19) appliquée une fois au triangle BCD et une fois au triangle BAD, ainsi que les inégalités triangulaires sur les longueurs des côtés, nous permettent de démontrer que le quadrilatère ABCD ne peut exister que si

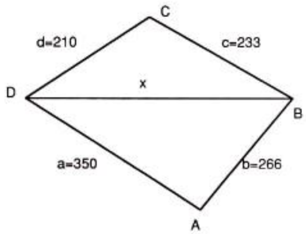


Figure 10. Quadrilatère possible correspondant au terrain $\mathbf{T_4}$.

$$a - b < x < a + b \text{ et } c - d < x < c + d$$

(on suppose que $a > b$ et $c > d$), c'est-à-dire si la diagonale DB a une longueur comprise entre 84 et 443 godia :

$$84 < x < 443.$$

Son aire A est alors donnée par la formule :

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+x)(-a+b+x)(a-b+x)(a+b-x)}$$
$$+\frac{1}{4}\sqrt{(c+d+x)(-c+d+x)(c-d+x)(c+d-x)}$$

qui peut se réduire à :

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{\left[(a+b)^2 - x^2\right]\left[x^2-(a-b)^2\right]} + \frac{1}{4}\sqrt{\left[(c+\mathrm{d})^2 - x^2\right]\left[x^2-(c-d)^2\right]} \quad ,$$

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{\left[379\,456 - x^2\right]\left[x^2 - 7\,056\right]} + \frac{1}{4}\sqrt{\left[196\,249 - x^2\right]\left[x^2 - 529\right]} \quad .$$

Cette aire peut prendre toutes les valeurs comprises entre l'aire minimale : 8 785,153 et l'aire maximale : 66 937,627 godia carrés (pour x = 362,037 5 godia).

Bien entendu, on pourrait paramétrer l'aire des quadrilatères ABCD par la longueur de la diagonale AC et l'on trouverait les mêmes valeurs des aires minimale et maximale.

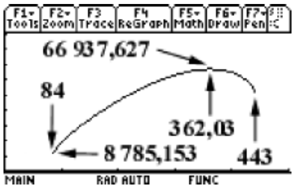


Figure 11. Aires possibles du quadrilatère correspondant au terrain $\mathbf{T_4}$.

Ainsi, l'on voit (Fig. 11) que l'aire maximale du terrain $\mathbf{T_4}$ de l'auteur vaut 66 937 godia carrés,

(19) Héron d'Alexandrie : mathématicien du Ier siècle après J.-C. qui a écrit le traité *Metrica* retrouvé à Constantinople en 1896. La formule qui lui est attribuée était toutefois déjà connue d'Archimède (-287, -212) 300 ans auparavant.

inférieure de 2 759 godia carrés à celle qu'il a calculée soit 69 696 godia carrés. Ce qui représente une surestimation de 4 % de l'aire de son terrain $\mathbf{T_4}$.

En faisant la même démarche pour le terrain $\mathbf{T_6}$ qui a 352 sur 224 sur 224 sur 224 godia de long, on trouve que celui-ci peut exister s'il a une diagonale de longueur comprise entre 128 et 448 godia, et que l'aire maximale d'un tel quadrilatère vaut 61 822 godia carrés, soit 3 714 godia carrés de moins que celle calculée par l'auteur et qui vaut 65 536 godia carrés. L'auteur surestime ainsi, au minimum de 6 %, l'aire de son terrain $\mathbf{T_6}$ (car l'aire de son terrain pourrait bien être inférieure à l'aire du quadrilatère d'aire maximale).

Si on considère enfin les deux terrains ensemble, l'aire maximale est égale à 128 759 godia carrés, et l'aire calculée dans le manuscrit est 135 232 godia carrés soit au minimum 6 473 godia carrés de trop. L'auteur surestime l'aire de son bien de 5 %.

Cette surestimation lui est préjudiciable, car elle le conduit à demander un terrain $\mathbf{T_7}$ d'une superficie de seulement 211 768 godia carrés (soit un carré de 457 godia de côté) au lieu d'au minimum 218 241 godia carrés (soit un carré de 467 godia de côté).

Voici une belle leçon prouvant (au moins d'un point de vue capitaliste) l'intérêt de bien connaître la géométrie !

3.2. La méthode proposée par Pellos

La méthode proposée par Pellos (le produit des moyennes des longueurs des côtés opposés) donnerait 69 377 godia carrés pour $\mathbf{T_4}$, ce qui est plus proche de l'aire maximale que le calcul de l'auteur, tout en lui étant supérieur de 3,6 %. Pour $\mathbf{T_6}$, cette méthode donnerait 64 512 godia carrés soit 4,3 % de trop, à rapprocher des 6 % d'erreur de l'auteur.

On pourrait ainsi demander un terrain $\mathbf{T_7}$ de 461 godia de côté.

La méthode proposée par Pellos est connue depuis très longtemps puisqu'on la trouve mentionnée dans le Papyrus de Rhind (un des plus vieux documents mathématiques actuellement retrouvés. Il date de 1650 avant J.-C. et doit son nom à A.H. Rhind qui l'acheta à Louxor en 1858. On l'appelle aussi Papyrus Ahmes du nom de son auteur).

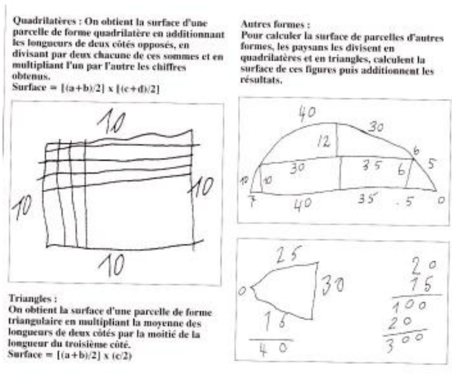


Figure 12. G. de Abreu, *Mathématiques paysannes.*

G. de Abreu[20] rapporte qu'elle est encore utilisée de nos jours par les paysans du Nordeste brésilien dans un contexte presque identique à notre document cadastral (Fig. 12). Ils doivent en effet mesurer et calculer la

(20) Guida de Abreu, *Mathématiques paysannes*, La Recherche n° 278, Juillet-Août 1995, p. 800-802.

surface de parcelles de terrain où pousse la canne à sucre pour fixer la rémunération d'un travailleur agricole, ou pour déterminer la quantité d'engrais à acheter, ou pour payer des moissonneurs et vendre la production à des raffineries de sucre.

Ces paysans utilisent des mesures de longueur (braças, cubos et contas) qui leur sont propres plutôt que celle du système métrique.

Bien que ces formules ne permettent pas en général d'obtenir des résultats exacts, elles répondent aux besoins pratiques, comme au XV^{e} siècle en Corse.

Il est intéressant de constater la constance de l'utilisation de certaines méthodes mathématiques approximatives pendant au moins 3 700 ans !

4. Conclusions

4.1. Le point de vue historique

Les quelques réflexions que nous venons de faire concernant la pratique de l'arithmétique dans ce document de la fin du XV^{e} siècle siècle montrent que, si les opérations arithmétiques usuelles sont connues et correctement sinon intelligemment utilisées, la formule qui sert pour le calcul de l'aire d'un quadrilatère quelconque ne donne que des résultats approximatifs qui pourraient être améliorés en utilisant une formule connue des égyptiens depuis des milliers d'années et mentionnée dans un livre contemporain au manuscrit. Toutefois les méthodes exactes faisant appel à la trigonométrie ne semblent pas (sauf étude contraire) encore à la portée des arpenteurs de l'époque.

L'historien J.A. Cancellieri tire la conclusion suivante :

« L'insistance du document sur des calculs et des totaux de mesures qui semblent par ailleurs assez évidents peut s'interpréter autrement, de façon fonctionnelle cette fois. C'est que nous sommes au moment même de l'allotissement du nouveau finage colonial, au point de contact décisif entre l'ultime expertise technique et la prise de décision politique. Il s'agit donc par dessus tout de convaincre, quitte à se répéter, de la nécessité d'une marche à suivre et de la légitimité des investissements qui doivent lui être liés. Si mon interprétation est exacte, ce document anonyme est celui d'un ingénieur vraisemblablement lombard, qui, au-delà même de cette opération spécifique, plaide peut-être aussi pour que soient suivies ses recommandations dans l'ensemble du dossier foncier de la nouvelle création urbaine. Ce document lèverait donc un coin de voile sur le mécanisme de la prise de décisions politiques au sein des dirigeants de la Casa di San Giorgio. Il refléterait la pédagogie insistante de l'homme de l'art, la rhétorique du technicien à l'adresse des décideurs – et des financiers – de l'Office, confronté à des interlocuteurs dépourvus de formation professionnelle. Au total, il nous renseignerait donc sur certains cheminements des décisions stratégiques de Gênes dans la Corse de la fin du Quattrocentro et, indirectement, sur des clivages de catégories mentales et de niveaux de formation au temps de ces “ ingénieurs de la Renaissance ” notamment italiens et en particulier lombards, naguère évoqués par Bertrand Cille et revisités depuis par Philippe Braunstein ».

4.2. Le point de vue « pédagogique »

« Décortiquer » un document cadastral de cette époque (ou tout document historique comportant des calculs) peut permettre à des enseignants du collège ou du lycée d'établir une approche différente des mathématiques susceptible d'intéresser des élèves qui ont toujours du mal à comprendre l'intérêt de celles-ci. L'approche pluridisciplinaire (historique, linguistique et mathématique) de cette démarche souligne la nécessité de ne pas cloisonner les disciplines et donne un peu plus de « consistance » aux mathématiques. Elle permet aussi de poser des jalons historiques sur des notions aussi courantes que sont les chiffres et les opérations arithmétiques. Ces notions étant très souvent ignorées des enseignants de mathématiques (nous parlons d'expérience).

On peut imaginer ce type de projet soit pour des itinéraires de découverte en cinquième, soit pour des T.P.E. en classe de première (s'ils correspondent aux thèmes retenus), la différence de niveau entre T.P.E et itinéraires de découverte portant sur les objets mathématiques sur lesquels on focalisera l'attention des élèves.

On peut aussi se contenter d'étudier de brefs passages de documents (comme une des parties de l'Annexe II) dans un cadre pédagogique moins contraignant.

Au collège, les techniques opératoires se prêtent aisément à une réflexion constructive (par exemple : essayer de comprendre les techniques de la division des Figures 8b, 9a et 9b ; retrouver d'autres techniques de la multiplication, comprendre celle de la Figure 6a, l'adapter au calcul en base 1 000 ou 10 000). La recherche d'autres graphies du système décimal en base 10 (chiffres arabes du Moyen-Orient, chiffres sino-japonais) et la réalisation d'opérations utilisant ces graphies permettraient de faire comprendre ce qui dans une opération arithmétique relève de convention, de travail de mémoire (tables de Pythagore) ou d'algorithme mathématique proprement dit.

Enfin l'utilisation des doigts pour les calculs intéresse toujours beaucoup tous ceux à qui on indique soit la *règle du paresseux* (on peut même faire faire une démonstration algébrique de son exactitude), soit la table de multiplication par 9 (on tend tous les doigts des deux mains, on plie celui correspondant au nombre à multiplier par 9, chaque doigt à gauche de ce doigt plié compte pour 10, chaque doigt à droite compte pour 1), soit l'indication de nombres de 1 à 1 000 000 sur les doigts et les parties du corps (voir G. Ifrah).

Au lycée, en Terminale S, certains manuels proposent d'établir la formule de Bramagupta (558 – 660 après J.-C.) en utilisant des relations trigonométriques.

On peut se demander également ce qu'il aurait fallu mesurer dans le cas des terrains $\mathbf{T_4}$ et $\mathbf{T_6}$ pour calculer leur aire exacte. Une réponse peut être apportée par le théorème de (Pierre de) Varignon (1731) qui indique que si l'on joint les milieux des côtés d'un quadrilatère convexe quelconque (Fig. 13) on obtient un parallélogramme dont l'aire vaut la moitié de l'aire du quadrilatère. Il aurait alors fallu matérialiser et mesurer un côté de ce parallélogramme (par exemple NP) et la perpendiculaire à ce côté passant par le milieu Q de AD.

La difficulté pratique aurait alors résidé dans la matérialisation du point H, point de NP à la plus courte distance de Q. L'utilisation d'une longue corde aurait sans doute permis de contourner cette difficulté.

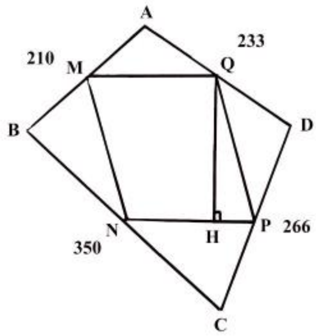


Figure 13. Théorème de Varignon.

La démonstration du théorème de Varignon (qui ne semble pas avoir été connu avant 1731, donc deux cent quarante ans après le manuscrit) est très facile puisqu'elle n'utilise que les propriétés de la *droite des milieux* d'un triangle. Elle peut être entreprise en fin de collège.

Il existe d'autres formules intéressantes pour calculer l'aire d'un quadrilatère quelconque, on peut les faire rechercher soit avec un moteur de recherche sur Internet, soit en consultant des encyclopédies de mathématiques(21). On pourra utiliser avec profit la formule de Bretschneider ou essayer de démontrer le théorème de Léon Anne.

ANNEXE I

La méthode de calcul de la date de Pâques proposée par Bède le Vénérable s'appuie sur les coïncidences suivantes : il y a 14 jointures de doigts et 5 ongles sur chaque main. Le calcul de cette date nécessite un calcul modulo 28 permettant de trouver le jour de la semaine qui correspond à un jour donné de l'année(22) (quel que soit le siècle dans le calendrier julien, en faisant une correction suivant le siècle dans le calendrier grégorien). On utilise alors les deux mains qui comportent 28 jointures.

La date de Pâques étant définie depuis le premier concile de Nicée en 325, comme le premier dimanche après la pleine lune qui suit l'équinoxe de printemps, il faut relier les cycles solaires et lunaires, ce que l'on sait faire depuis le grec Méton. Un cycle de 19 années solaires (que les Athéniens appelaient le Nombre d'or et utilisaient dès 433 avant J.-C.) correspondant à 235 lunaisons, on utilise les 14 jointures d'une seule main en y ajoutant les 5 ongles pour calculer modulo 19.

Cette méthode n'est cependant pas complètement explicitée dans De temporum ratione.

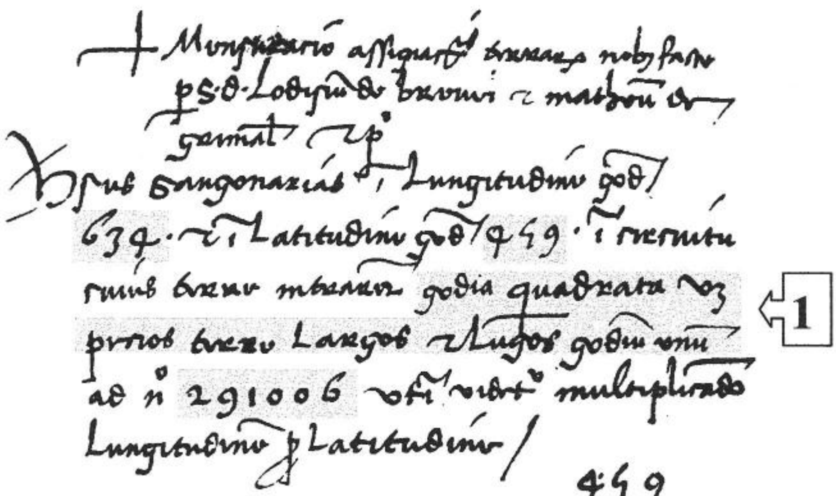
(21) Éric Weisstein, *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*, CRC Press, 1999.
(22) M. Criton, *Comment utiliser vos vieux agendas ?*, Tangente nº 79, p. 16, février-mars 2001

ANNEXE II

Dans cette annexe, nous donnons le document cadastral, sa retranscription et sa traduction. Pour rendre ce corpus exploitable en classe, nous avons découpé le document en parties comportant au plus deux opérations arithmétiques. Nous avons juxtaposé retranscription et traduction. Nous avons également mis en regard de chaque opération l'écriture qui utilise la graphie actuelle des chiffres (pour éviter la confusion entre le 4 ancien et le 5 actuel) et mentionné sa nature car le signe opératoire est toujours omis au XV^{e} siècle. Les nombres dans le document (en écriture chiffrée ou littérale) ont été détachés sur un fond grisé. Les indications sur le godium carré sont repérées dans le texte par des flèches numérotées. Elles figurent en caractères gras dans la retranscription et la traduction.

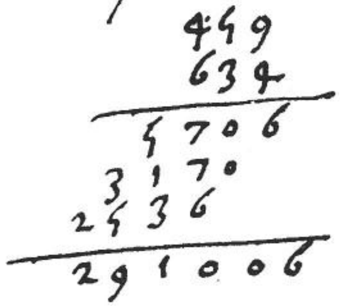
Enfin pour une exploitation plus facile du document dans un contexte pédagogique, nous avons numéroté les terrains de $\mathbf{T_1}$ à $\mathbf{T_7}$.

PARTIE 1



Multiplication

$$\begin{array}{r} 459 \\ \times\ 634 \\ \hline 5706 \\ 3170 \\ 2536 \\ \hline 291006 \end{array}$$



Mensuracio assignacionis terrarum nobis facte per spectabiles dominos Lodisio de Bervei et Matheum de Grimaldis, et primo :

Versus Sangonarias in lungitudine godia 634 et in latitudine godia 459 in circuitu cuius terre intrarent ***godia quadrata, videlicet pecios terre largos et lungos godium unum*** *ad n° 291006, ut infra videtur multiplicando lungitudinem par latitudinem :*

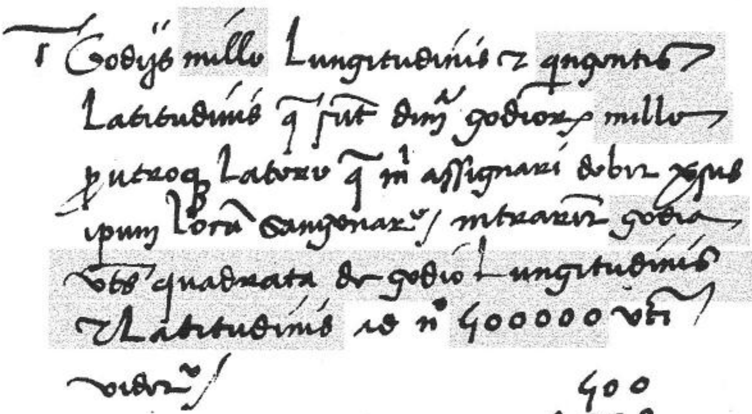
Mesure des terres qui nous ont été assignées par messires Lodisio de Bervei et Matteo de Grimaldis, et primo:

Vers les Sanguinaires, en longueur 634 godia et en largeur 459, ce qui fait à l'intérieur du périmètre 291006 **godia carrés, à savoir en pièces de 1 godium de long et de large**, comme on le voit ci-dessous en multipliant la longueur par la largeur : *(il s'agit du terrain que nous appellerons* T_1*)*

PARTIE 2

In godiis mille lungitudinis et quingentis latitudinis, que sunt dimidi godiorum mille pro utroque latere quos mihi assignari debet versus ipsum locum Sangonarie, intrarent ***godia ut supra quadrata de godio uno lungitudinis et latitudinis*** *ad n° 500000 ut infra videtur :*

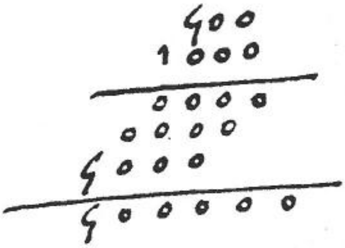
1000 godia de long sur 500 de large, qui font la moitié de 1000 godia de chaque côté, qui doivent m'être assignés vers le même lieu des Sanguinaires, ce qui fait 500000 **godia carrés comme ci-dessus de 1 godium de large et de long**, comme on le voit ci-dessous :



2

Multiplication

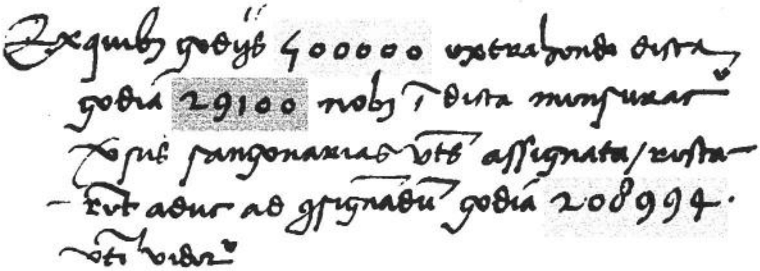
$$\begin{array}{r} 500 \\ \times\, 1000 \\ \hline 0000 \\ 0000 \\ 5000 \\ \hline 500000 \end{array}$$



PARTIE 3

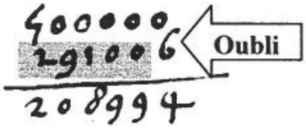
Ex quibus godiis 500000 extrahendo dicta godia 29100 [sic] nobis in dicta mensuracione versus Sangonarias ut supra assignata, restarent aduc a consignandum godia 208994 ut infra videtur :

Des dits 500000 godia dont il faut retrancher 29100[sic] godia qui nous sont assignés comme ci-dessus, restent encore à assigner 208994 godia comme on le voit ci dessous : *(terrain T_2)*



Soustraction

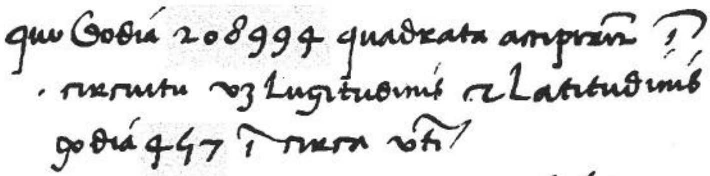
$$\begin{array}{r} 500000 \\ -\ 291006 \\ \hline 208994 \end{array}$$



PARTIE 4

Que godia 208994 quadrata accipirent in circuitu, videlicet lungitudinis et latitudinis, godia 457 in circa, ut infra :

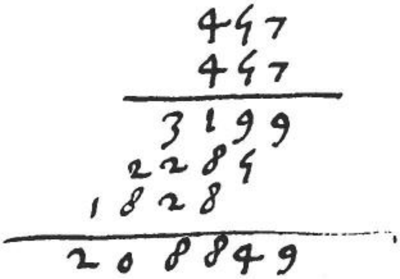
Lesquels 208994 godia carrés font à l'intérieur du périmètre environ 457 godia comme ci-dessous : *(terrain T_2)*



Multiplication

(et racine carrée implicite)

$$\begin{array}{r} 457 \\ \times\ 457 \\ \hline 3199 \\ 2285\ \ \\ 1858\ \ \ \ \\ \hline 208849 \end{array}$$



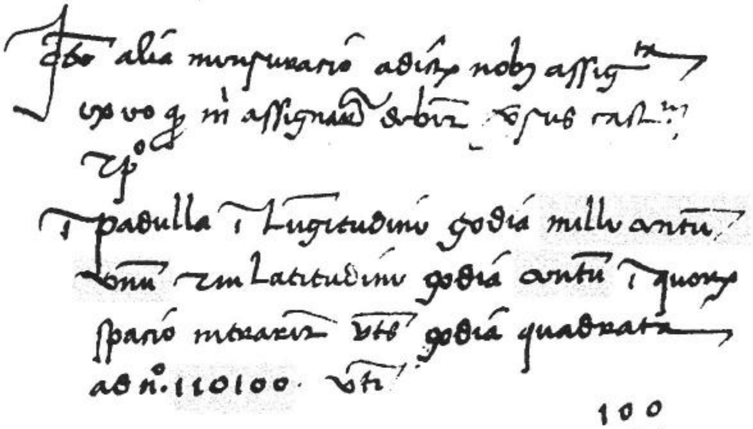
PARTIE 5

Item alia mensuracio a dictis nobis assignata ex eo quod mihi assignari debent versus castrum, et primo :

In Padulla in lungitudine godia mille centum unum et in latitudine godia centum, in quorum spacio intrarent ut supra godia quadrata ad n° 110100 ut infra :

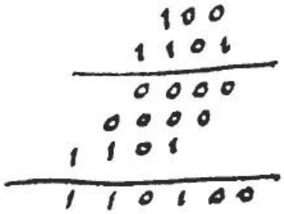
De même : autre mesure de ce qui doit m'être assigné vers le château, et primo :

Aux Padule, une surface de 1101 godia de long sur 100 de large, où vont comme ci-dessus 110100 godia carrés, comme ci-dessous : *(terrain T_3)*



Multiplication

$$\begin{array}{r} 100 \\ \times\ 1101 \\ \hline 0000 \\ 0000 \\ 1101 \\ \hline 110100 \end{array}$$



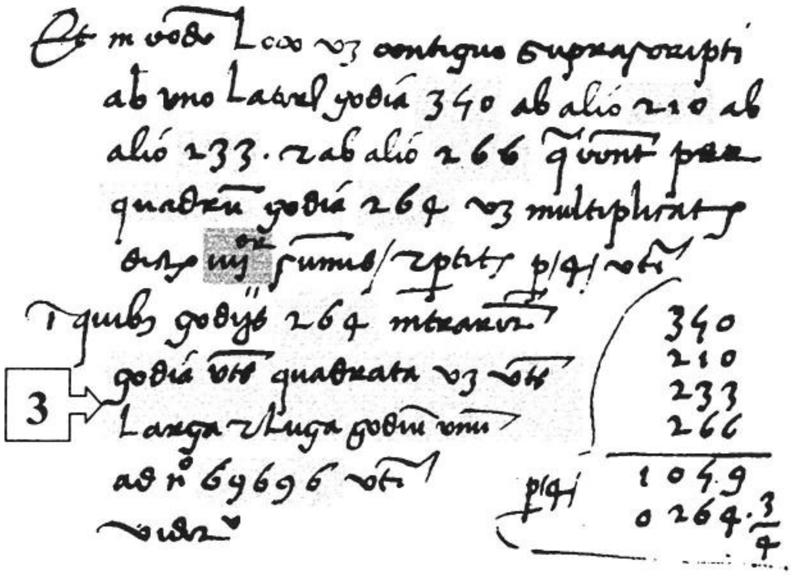
PARTIE 6

Et in eodem loco, videlicet contiguo suprascripti, ab uno latere godia 350, ab alio 210, ab alio 233 et ab alio 266, que essent per quadrum godia 264, videlicet multiplicatur dictis quatuor summis et pertinetur per 4 ut infra :

In quibus godiis 264 intrarent ***godia ut supra quadrata, videcelit ut supra larga et lunga godium unum****, ad n° 69696 ut infra videtur :*

Et dans ce même endroit, à savoir contiguë à celle écrite ci-dessus, une surface de 350, 210, 233, et 266 godia de côté, qui font « per quadrum » 264 godia, à savoir en additionnant les quatre sommes et en les divisant par 4, comme ci-dessous :

Dans lesquels 264 godia il y a 69696 **godia carrés comme ci-dessus, à savoir en carrés de 1 godium sur 1**, comme on le voit ci-dessous : *(terrain T_4)*



Addition

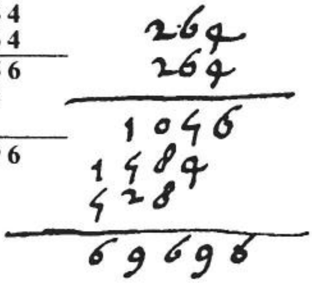
350
+210
+233
+266
1059

Division

1059 | 4
264 + $\frac{3}{4}$

Multiplication

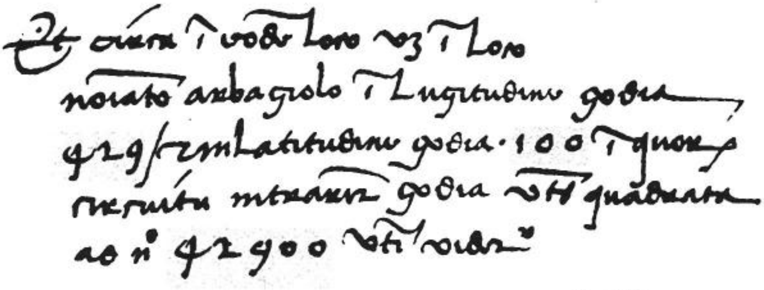
264
x 264
1056
1584
528
69696



PARTIE 7

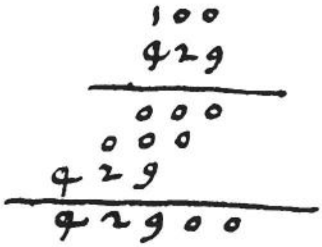
Et circa in eodem loco, videlicet in loca nominato Arbagiolo, in lungitudine godia 429 et in latitudine godia 100, in quorum circuitu intrarent godia ut supra quadrata ad n°42900 ut infra videtur:

Et à proximité de ce lieu, à savoir au lieu-dit Arbaghjolu, une surface de 429 godia de long sur 100 de large, qui fait de l'intérieur du périmètre comme ci-dessus 42900 godia carrés, comme on le voit ci dessous : *(terrain T_5)*

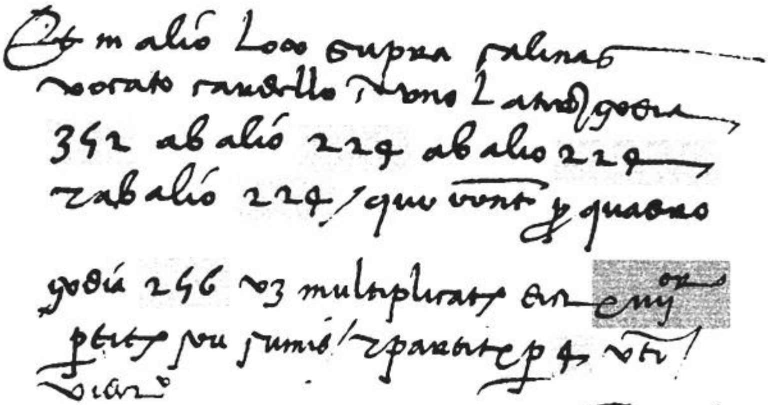


Multiplication

```
   100
 x 429
   000
  000
 429
 42900
```



PARTIE 8

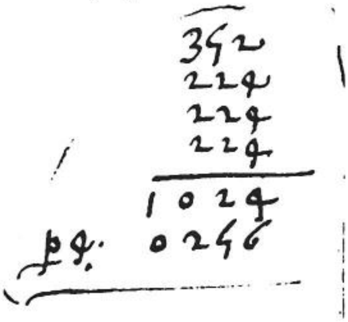


Addition

```
  352
 +224
 +224
 +224
 1024
```

Division

```
 1024 | 4
      | 256
```



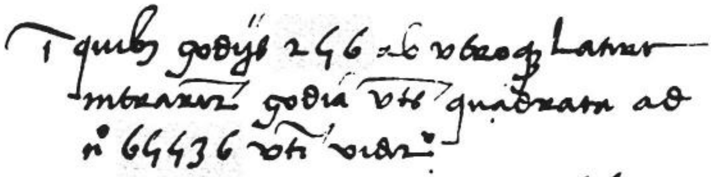
Et in in alio loco supra Salinas vocato Cardello, in uno latere godia 352, ab alio 224, ab alio 224 et ab alio 224, qui essent pro quatro godia 256, videlicet multiplicatis dictis IIII^{or} partitis seu sumis et partitis per 4, ut infra videtur:

Et dans un autre endroit au-dessus des Salines, appelé Cardellu, une surface de 352, 224, 224 et 224 de côtés, soit en moyenne 256 godia, à savoir en additionnant les dites quatre parties ou sommes et les divisant par quatre, comme on le voit ci-dessous : ***(terrain T_6)***

PARTIE 9

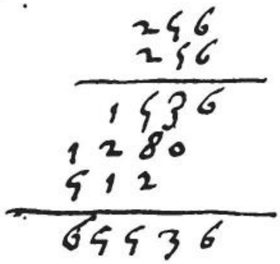
In quibus godiis 256 ab utroque latere intrarent godia ut supra quadrata ad n°65536 ut infra videtur :

Dans lequel espace de 256 godia il y a 65536 godia carrés comme ci-dessus, comme on le voit ci-dessous :



Multiplication

$$\begin{array}{r} 256 \\ \times\ 256 \\ \hline 1536 \\ 1280 \\ 512 \\ \hline 65536 \end{array}$$

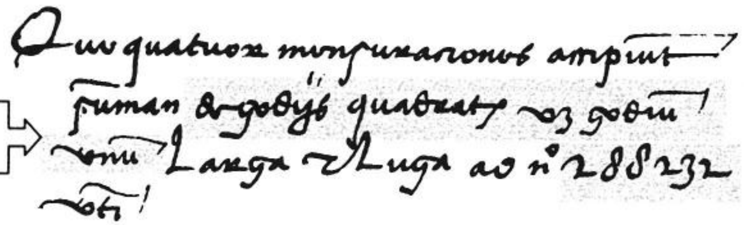


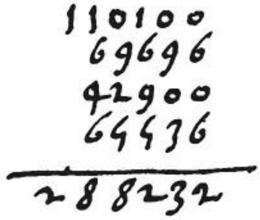
PARTIE 10

Que quatuor mensuraciones accipiunt summam de ***godiis quadratis, videlicet godium unum larga et lunga*** *ad n° 288232 ut infra :*

Lesquelles quatre mesures font au total 288232 **godia carrés, à savoir de 1 par 1**, comme ci-dessous :

4



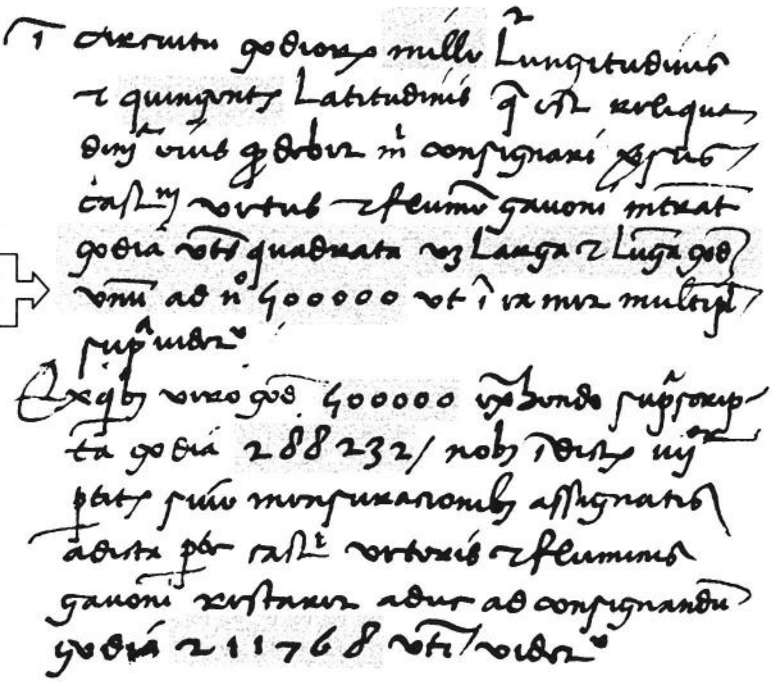


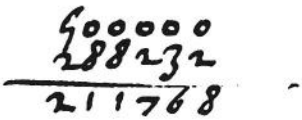
Addition

$$\begin{array}{r} 110100 \\ +\quad 69696 \\ +\quad 42900 \\ +\quad 65536 \\ \hline 288232 \end{array}$$

PARTIE 11

5





Soustraction

$$\begin{array}{r} 500000 \\ -\ 288232 \\ \hline 211768 \end{array}$$

In circuitu godiorum mille lungitudinis et quingentorum latitudinis que est reliqua dimidia eius quod debet mihi consignari versus castrum vetus et flumen Gavoni intrant ***godia ut supra quadrata, videlicet largam et lungam godium unum*** *ad n° 500000 ut in [eamet] multiplicatione supra videtur :*

Ex quibus vero godiis 500000 extrahendo suprascripta godia 288232 nobis in dictis quatuor partitis sive mensuracionibus assignatis a dicta parte castri veteris et fluminis Gavoni, restaret aduc ad consignandum godia 211768 ut infra videtur :

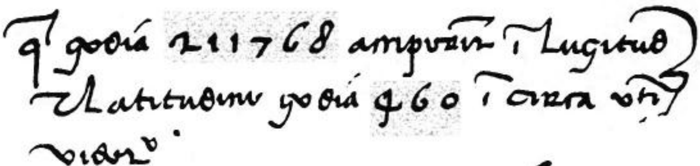
A l'intérieur du périmètre de mille godia de long sur cinq cents de large qui fait l'autre moitié de ce qui doit m'être assigné vers le vieux château et vers le fleuve Gravona, il y a 500000 **godia carrés, comme ci-dessus à savoir de 1 godium de long sur 1 de large**, comme on le voit dans la multiplication plus haut :

Desdits 500000 godia il faut retrancher les susdits 288232 godia à nous assignés dans les dites quatre partitions ou mesures depuis le vieux château et le fleuve Gravona, restent donc encore à assigner 211768 godia, comme on le voit ci-dessous :

PARTIE 12

Que godia 211768 acciperint in lungitudine et latitudine godia 460 in circa ut infra videtur :

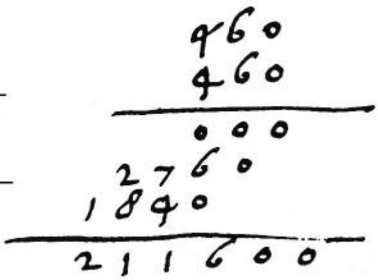
Lesquels 211768 godia font environ 460 godia de côté comme on le voit ci-dessous : *(terrain T_7)*



Multiplication

(et racine carrée implicite)

$$\begin{array}{r} 460 \\ \times\ 460 \\ \hline 000 \\ 2760 \\ 1840 \\ \hline 211600 \end{array}$$

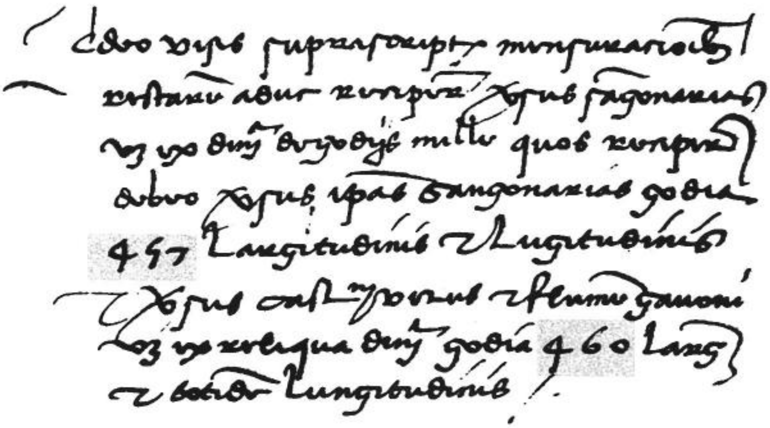


PARTIE 13

Ideo visis suprascriptis,restarent aduc recipere versus Sangonarias videlicet ex dimidia de godiis mille quos recipere debeo versus ipsas Sangonarias godia 457 largitudinis et lungitudinis, et versus castrum vetus et flumen Gavoni, videlicet ex reliqua dimidia godia 460 largitudinis et totidem lungitudinis.

Donc, vu ce qui est écrit ci-dessus, restent encore à recevoir vers les Sanguinaires, à savoir de la moitié des mille godia que je dois recevoir vers ces mêmes

Sanguinaires 457 godia en large et en long (T_2), et vers le vieux château et le fleuve Gravona, à savoir de la moitié restante, 460 de large et pareil de long (T_7).



PARTIE 14

Et notandum est quod dimidia de godiis mille ab utroque latere est godia mille lungitudinis et quingenta latitudinis ut per figuram infrapositam videtur :

Il faut noter que la moitié de mille godia de chaque côté fait mille godia de long et cinq cents de large comme on le voit d'après la figure dessinée ci-dessous :