Le mouvement dans la géométrie grecque

Bernard Parzysz(*)

QUELQUES REPÈRES CHRONOLOGIQUES

–600	Thalès de Milet	
	Pythagore de Samos	
–500		
	Hippias d'Elis	*quadratrice*
	Hippocrate de Chios	*lunules*
- 400	Archytas de Tarente	*cylindres*
	Platon	
	Ménechme / Dinostrate	
- 300	**Euclide**	**Les Éléments**
	Archimède	*spirale*
	Ératosthène	*mésolabe*
	Dioclès	*cissoïde*
	Apollonius de Perga	**Les Coniques**
- 200	Nicomède d'Alexandrie	*conchoïde*

Comme son nom l'indique (*géométrie* = mesure de la Terre, c'est-à-dire « art de l'arpentage »), la géométrie grecque est ancrée dans l'espace physique : Thalès de Milet (ca 624 av. J-C - ca 548 av. J-C), le premier mathématicien grec auquel on attribue des faits précis, est réputé – entre autres choses – avoir mesuré la hauteur des pyramides à l'aide de l'ombre d'un bâton, et aussi avoir indiqué une façon de déterminer la distance au rivage d'un bateau en mer.

D'après Proclus (412 ap. J-C - 485 ap. J-C), commentateur des *Éléments* d'Euclide, pour les premiers géomètres grecs la ligne était un « *écoulement du point* » et la droite un « *écoulement sans aspérités ni déviations* » ([Szabó] p. 266), formulations qui font référence au sensible et au mouvement. Mais, peu à peu, les géomètres grecs vont prendre leurs distances par rapport aux contingences matérielles, comme l'indique Platon d'Athènes (ca 427 av. J-C - 348 av. J-C).

1- La perfection géométrique chez Platon

(Au sujet de la création du monde) « *Pour la forme, il lui a donné celle qui lui convenait et avait de l'affinité avec lui. Or la forme qui convenait à l'animal qui devait contenir en lui tous les animaux, c'était celle qui renferme en elle toutes les autres formes. C'est pourquoi le dieu a tourné le monde en forme de sphère, dont les extrémités sont partout à égale distance du centre, cette forme circulaire*

(*) GReDiM (IUFM Orléans-Tours) & Equipe DIDIREM (université Paris-7)

étant la plus parfaite de toutes et la plus semblable à elle-même (…). *Il lui attribua un mouvement approprié à son corps, celui des sept mouvements qui s'ajuste le mieux à l'intelligence et à la pensée. En conséquence, il le fit tourner uniformément sur lui-même à la même place et c'est le mouvement circulaire qui'il lui imposa*. » (Timée, 34 a)

Parménide : *Le « droit » et le « rond » constituent le fondement de toute figure*.
Aristote : *L'un est donc illimité, s'il n'a ni commencement ni fin*.
Parménide : *Il est illimité*.
Aristote : *Il est donc aussi sans figure ; car il ne participe ni du rond ni du droit*. (Parménide, 137 d)

Qu'est-ce que la géométrie pour Platon ?
« *[la géométrie] a pour objet la connaissance de ce qui est toujours et non de ce qui naît et périt*. » (République, 527 a)
« *Tu sais donc qu'ils se servent de figures visibles et raisonnent sur elles en pensant, non pas à ces figures mêmes, mais aux originaux qu'elles reproduisent ; leurs raisonnements portent sur le carré en soi et la diagonale en soi, non sur la diagonale qu'ils tracent, et ainsi du reste ; des choses qu'ils modèlent et dessinent, et qui ont leurs ombres et leurs reflets dans les eaux, ils se servent comme d'autant d'images pour chercher à voir ces choses en soi autrement que par la pensée*. » (République, 510 d)

Pour cette raison, Platon reproche aux géomètres d'utiliser un langage qui évoque les réalités physiques (mais comment faire autrement, sauf à utiliser des néologismes ?).

Outre l'idée de perfection « idéale » attachée à la droite et au cercle, J.-C. Carrega voit encore une autre raison au recours à la règle et au compas, à l'exclusion de tous autres instruments [Carrega 1981, p. 5] : la crise provoquée chez les Pythagoriciens par la découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, nombre malgré tout constructible à l'aide de la règle et du compas (puisque c'est le cas du carré). La règle et le compas auraient alors servi de « caution scientifique » aux nouveaux nombres ainsi découverts. Et, ajoute Carrega, « *de plus, en s'interdisant d'autres types de construction on se préservait contre de nouvelles crises* » (ibid. p. 6)

2- Le mouvement dans les *Éléments* d'Euclide

Le vocabulaire des Éléments d'Euclide fait fréquemment usage de termes évoquant le mouvement. Exemples :

a) les deux « demandes » énoncées au début du Livre I :

« *Pouvoir <u>décrire</u> un cercle de centre et de rayon donnés*.[(1)]
Pouvoir <u>mener</u> une droite <u>allant</u> d'un point donné à un autre. »

b) la première Proposition du Livre I, relative à la construction du triangle équilatéral :

« *Que du centre* A *et au moyen de l'intervalle* AB *soit <u>décrit</u> un cercle* BCD*, et qu'ensuite du centre* B *et au moyen de l'intervalle* BA*, soit <u>décrit</u> le cercle* ACE*,*

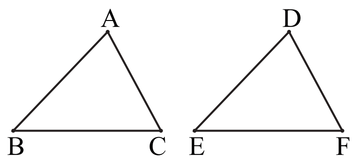
(1) C'est moi qui souligne.

et que du point C *auxquels les cercles s'entrecoupent soient* *jointes* *les droites* CA, CB *jusqu'aux points* A, B. »

c) La démonstration du premier cas d'égalité des triangles (4^e Proposition du Livre I) :

« *Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés et les triangles seront aussi égaux, ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.*

(…) *En effet, si l'on appliquait le triangle* ABC *sur le triangle* DEF *de manière à faire coïncider d'abord les points* A *et* D*, puis les côtés* AB *et* DE*, le point* B *coïnciderait avec* E*, car* AB = DE*. Les côtés* AC *et* DF *coïncideraient alors aussi, à cause de l'égalité entre les angles* BAC *et* EDF*, de sorte que le point* C*, à son tour coïnciderait avec* F*, car* AC = DF.



D'autre part, les points B *et* E *ayant déjà coïncidé, les côtés* BC *et* EF *coïncideront aussi, car, si d'une part* B *et* E *et d'autre part* C *et* F *coïncident, mais les côtés* BC *et* EF *ne coïncident pas, deux droites pourraient délimiter une aire, ce qui est impossible. Nécessairement donc les côtés* BC *et* EF *coïncideront et ils seront égaux.*

Par conséquent le triangle ABC *tout entier coïncidera avec le triangle* DEF *tout entier et il lui sera égal, et les angles restants de l'un coïncideront avec les angles restants de l'autre et ils seront respectivement égaux entre eux…* »

Dans cette démonstration – comme d'ailleurs dans celles des deux autres cas d'égalité – intervient le principe de superposition des figures, qui fait appel au mouvement et au temps (*d'abord*, *puis*, *à son tour*, *déjà*, …). Mais, comme le fait remarquer Bkouche ([Bkouche 2000], p. 620), cela permet à Euclide de ne plus y avoir recours dans les démonstrations qui en découlent. Par exemple la 5^e Proposition du Livre I :

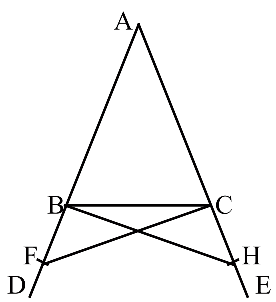
« *Dans tout triangle isocèle les angles à la base sont égaux et les côtés égaux prolongés déterminent des angles sous la base égaux.*

Soit ABC *un triangle isocèle tel que l'on ait* AB = AC *; prolongeons les côtés* AB *et* AC *suivant* BD *et* CE*. Je dis que l'on a :*

ABC = ACB *et* CBD = BCE.

Prenons en effet sur BD *un point quelconque* F *et du plus grand segment* AE *découpons un segment* AH *égal au plus petit* AF *et traçons* FC *et* HB.

Puisque AF = AH *et* AB = AC *et ces droites forment un même angle* FAH*, nous avons* FC = HB*, les triangles* AFC *et* AHB *sont égaux et les angles restants de l'un sont respectivement égaux aux*



angles restants de l'autre triangle opposés aux côtés égaux : ACF = ABF, AFC = AFB. » etc.

3- Les trois grands problèmes grecs

Pour illustrer la question du mouvement dans la géométrie grecque classique, je m'appuierai sur l'exemple de ce qu'il est convenu d'appeler « les trois grands problèmes », à savoir :

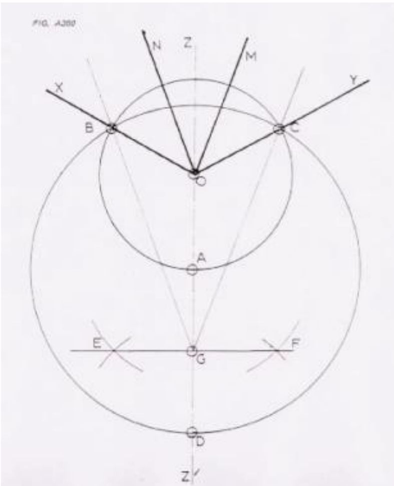
– la quadrature du cercle,
– la duplication du cube,
– la trisection de l'angle.

Ces trois problèmes ont traversé toute l'Antiquité, et ils ont même perduré jusqu'au 19e siècle, lorsque Pierre Wantzell démontra en 1837 qu'un réel est constructible à la règle et au compas si, et seulement si, il est algébrique sur **Q**, son degré étant une puissance de 2 (mais, déjà depuis 1775, l'Académie des Sciences de Paris avait décidé de ne plus lire les quadratures qu'on lui enverrait). Malgré son appellation, le problème des constructions « à la règle et au compas » relève à l'évidence de la théorie et non du domaine matériel : dans le domaine professionnel (par exemple en chaudronnerie), les constructions se font bien « à la règle et au compas », mais, du point de vue de la théorie, elles sont tantôt exactes, tantôt seulement approchées. Cela ne tire pas à conséquence puisqu'on se place dans une logique de précision (c'est-à-dire d'efficacité) et non dans une logique de conformité à la théorie. À titre d'exemple, voici deux pages d'un aide-mémoire « à l'usage des élèves dessinateurs » [Arthot & Mansion 1982] :

– la trisection d'un angle quelconque à la règle et au compas (p. 15) n'est pas présentée comme une construction approchée :

A 360 DIVISION D'UN ANGLE XOY EN 3 PARTIES ÉGALES.

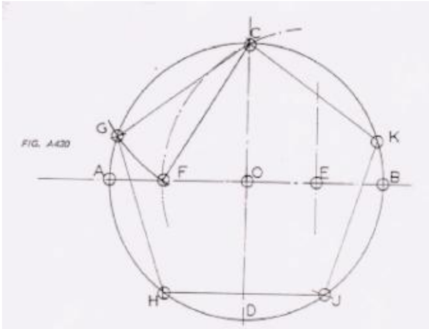
– Construire la bissectrice de l'angle.
– De O comme centre, tracer un cercle, quelconque, coupant les côtés de l'angle en B et C et la bissectrice en A (voir figure).
- De A comme centre, avec AB comme rayon, tracer un cercle coupant la bissectrice en D (voir figure).
- Joindre G, milieu de AD, à B et C.
- Par O, mener les parallèles ON à GB et OM à GC.
L'angle est divisé en 3 angles égaux.



– en revanche, <u>la construction du pentagone régulier inscrit dans un cercle</u> (dite de Ptolémée, p. 19) est présentée comme approchée, alors qu'elle est exacte :

A 430 PENTAGONE (5 côtés)

– De E, milieu du rayon OB, porter EF = EC.
– CF est le côté approché du pentagone.
– Il suffit de porter cinq fois cette corde sur le cercle et de joindre les points obtenus.



Dans une problématique du constat, ceci ne saurait nous surprendre, puisque tout dessin géométrique tracé sur une feuille (ou, plus généralement, un support plan) peut être considéré comme une version « approchée » d'un objet idéal au sens platonicien (traits sans épaisseur, segments parfaitement droits, etc.).

a) La quadrature du cercle

1) En tant que problème pratique, la quadrature du cercle apparaît déjà en Egypte dans le papyrus Rhind (ca 1650 av. J-C) :

« *Construire un carré équivalent à un cercle. Réponse : retirer 1/9 au diamètre et construire le carré sur ce qui reste.* »

En fait, l'aire du disque est ≠/4 (soit environ 0,785) et celle du carré est 64/81 (soit environ 0,790). On se situe là dans le domaine pratique, et non dans une quelconque théorie géométrique.

2) Dans sa comédie des *Oiseaux* (414 av. J-C), Aristophane introduit le personnage (historique) de l'astronome Méton(2), qu'il ridiculise à cause de ses tentatives de quadrature du cercle (« *tétragonisme* »), ce qui montre que le problème était déjà un grand « classique » de la géométrie :

Méton : Après insertion d'un compas (…) *je ferai mes mensurations par application d'une équerre droite, en sorte que, tu vois, le cercle devienne quadrangulaire, et qu'au centre il y ait un rond-point où aboutiront des rues rectilignes, exactement centripètes, et de l'exacte circularité duquel, comme d'une étoile, irradieront dans tous les azimuts des rayons rectilignes.* (trad. V.-H. Debidour. Éd. Gallimard 1966, p. 83)

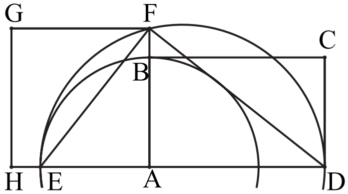
3) En fait, les premiers quadrateurs connus sont **Anaxagore de Clazomène** et **Hippocrate de Chios** (milieu du 5^{e} siècle av. J.-C.).

(2) Méton est l'inventeur d'un cycle destiné à faire concorder les calendriers lunaire et solaire. Il consistait à intercaler, dans une période de 19 années juliennes (12 mois de 29,53 jours), 7 autres mois, de sorte que les phases moyennes de la Lune reviennent sensiblement aux mêmes dates tous les 76 ans (à cause des années bissextiles).

L'origine de l'intérêt des Grecs pour les quadratures est mal connue. Rappelons-en le principe : étant donnée une surface, il s'agit de trouver un carré ayant la même aire.

Pour Arpád Szabó, le problème primitif, d'où proviendraient tous les autres, serait celui de la quadrature du rectangle :

Ce problème est parfaitement résoluble en utilisant le fait que, dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur celle-ci : l'aire du rectangle ABCD est égale à celle du carré construit sur [AX].



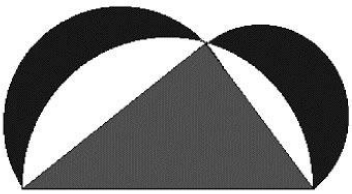
Aristote pense que ce problème est né de la recherche de la moyenne proportionnelle (moyenne géométrique), mais que la cause en a été oubliée et que seul le problème est resté :

La définition ne doit pas se contenter d'exprimer en quoi consiste la chose (…)*, mais elle doit aussi manifester la cause. Or, les définitions sont ordinairement des conclusions. Par exemple : « Qu'est-ce que la quadrature ? C'est l'égalité d'un carré et d'un rectangle ». Une telle définition est une conclusion. Mais dire que la quadrature est la découverte de la moyenne proportionnelle, c'est exprimer la cause de la chose.* (Traité de l'âme, II 2, 413 A 13-20)

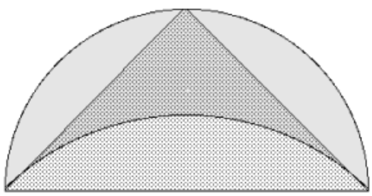
De façon générale, les quadratures concernant les polygones ne posent pas problème, mais il n'en va pas de même de celles qui mettent en jeu une surface curviligne.

4) Plutarque raconte seulement qu'**Anaxagore de Clazomène** (ca 500 av. J-C - 428 av. J-C), emprisonné pour ses idées en astronomie, occupait ses « loisirs » en tentant de quarrer le cercle.

5) Nous en savons un peu plus sur **Hippocrate de Chios** (ca 450 av.J-C - ?) par un unique fragment, décrivant quatre quadratures de *lunules* (fragment copié par Simplicius, commentateur d'Aristote, au 6^{e} s. ap. J-C). En voici deux exemples :



Exemple 1 : la somme des aires des deux lunules noires est égale à celle du triangle rectangle gris.

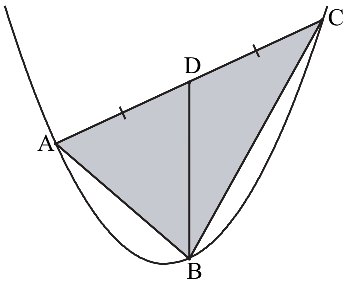


Exemple 2 : la lunule grise a la même aire que le triangle rectangle isocèle tramé.

On pense qu'Hippocrate, à partir de telles quadratures, cherchait à quarrer le cercle.

6) **Archimède de Syracuse** (ca 287 av. J-C - 212 av. J-C) résolut la quadrature de la parabole :

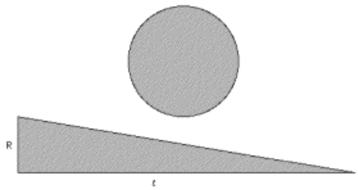
« *Voici* ABC, *un segment de parabole limité par la droite* AC *et la parabole* ABC, *et soit* D *le point milieu de* AC. *Trace la droite* DBE *parallèle à l'axe de la parabole et joins* AB, BC. *Alors, le segment* ABC *est 4/3 du triangle* ABC. » (La Méthode, Proposition 1)



Dans la Méthode (dont un manuscrit ne fut retrouvé – sous un palimpseste religieux – qu'en 1906), Archimède distingue les méthodes mécaniques et les méthodes géométriques. Il insiste sur le fait que les méthodes mécaniques ont une fonction heuristique importante, mais que les seules preuves irréfutables relèvent de démonstrations géométriques. Ainsi, il donne une justification de la quadrature ci-dessus par la méthode des équilibres(3), mais conclut de la manière suivante :

« *Maintenant ce qui a été énoncé n'est pas actuellement démontré par l'argument utilisé ; mais cet argument a fourni un indice que la conclusion est vraie. Voyant alors que le théorème n'est pas démontré, mais suspectant aussi que la conclusion est vraie, nous devons avoir recours à la démonstration géométrique que j'ai moi-même découverte et que j'ai déjà publiée*(4). »

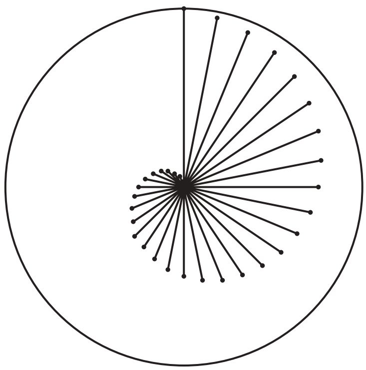
7) **Archimède** démontra également l'équivalence de la quadrature du cercle et de sa rectification (= trouver un segment ayant même longueur qu'un cercle donné) :



Malgré tout, la résolution de la quadrature du cercle à la règle et au compas résista à tous les efforts, et on vit apparaître des méthodes diverses et variées, comme on va le voir ci-après.

8) **Archimède** (toujours lui) inventa également la <u>spirale arithmétique</u> pour résoudre la quadrature (et, de surcroît, la trisection) :

Si une ligne droite tracée dans un plan se meut uniformément un certain nombre de fois autour d'une extrémité fixe et retourne à sa position de départ, et si, en même temps que la droite se meut, un point se meut le long de la droite en partant de l'origine, ce point décrira une spirale (helica) dans le plan. (Sur les spirales)



La courbe est donc obtenue par composition

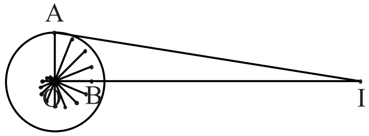
(3) Pour plus de détails, voir [BATHIER-FAUVET 1997].

(4) in Sir Thomas L. Heath, ed. : The Works of Archimedes, with the Method of Archimedes. Ed. Dover, New York. Cité in [Collette 1973], p. 86.

de deux mouvements : rotation uniforme du rayon autour de l'origine et déplacement uniforme sur ce rayon.

Dans le même traité, la Proposition 2 s'énonce comme suit :

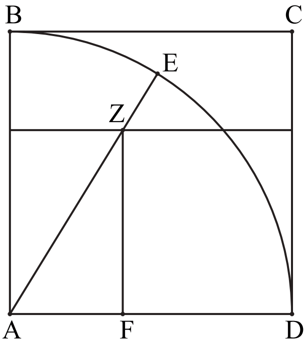
Si une ligne est tangente à l'extrémité d'une spirale décrite en première révolution, et si, du point d'origine de la spirale, on élève une perpendiculaire sur la droite initiale de révolution, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, tandis que la droite située entre la tangente et l'origine de la spirale sera égale à la circonférence du premier cercle.



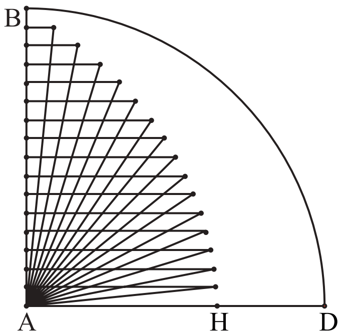
Le problème de la rectification (donc celui de la quadrature) est ainsi ramené à celui de la tangente à la spirale « à l'extrémité décrite en première révolution » (c'est-à-dire à la fin du premier tour). Mais, hélas, la construction de la tangente à la spirale n'est pas réalisable à la règle et au compas !

9) Le sophiste **Hippias d'Elis** (ca 460 av. J-C - ?), contemporain de Socrate, inventa une courbe (la *quadratrice*) qui lui permettait de trisecter un angle (voir plus loin). Mais, un siècle plus tard, **Dinostrate** (début du 4^{e} s. av.J-C) l'utilisa pour rectifier le cercle. Voici ce qu'en dit Pappus d'Alexandrie (vers 300 ap. J-C) :

Soit un carré ABCD*, l'arc* BED *est décrit autour du centre* A*.* AB *se meut autour de* A *restant fixe,* B *décrivant l'arc* BED*. Supposons que* BC*, toujours parallèle à* AD*, suive* B *dans son mouvement le long de* BA*, et qu'en même temps le mouvement de* AB *se fasse uniformément dans l'angle* BAD *(c'est-à-dire que le point* B *décrive l'arc* BED*), et que* BC *parcoure la distance* BA *(c'est-à-dire que le point* B *descende de la hauteur* BA*).*



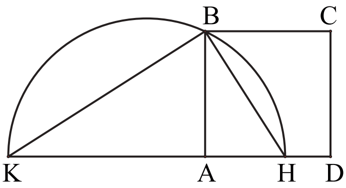
Il arrivera à l'évidence que la droite AD *coïncidera simultanément avec* AB *et* BC*. Pendant qu'un tel mouvement se produit, les droites* AB *et* BC *se coupent l'une l'autre en un point changeant avec elles, et par lequel est décrite, dans l'espace entre les droites* BA *et* AD *et l'arc* BED*, une courbe concave* BZH *qui paraît commode pour trouver le carré égal au cercle donné.* (…) *Pour toute droite comme* AZE *menée de* A *sur la circonférence, le rapport de l'arc complet à* ED *sera le même que le rapport de la droite* BA *à* ZF*. En effet cela est rendu évident par la génération de la ligne.* (Pappus, Collections mathématiques)



La courbe, lieu du point Z, est la quadratrice. Son extrémité H sur [AD] a pour abscisse 2/≠.

La quadrature du rectangle nous fournira alors un segment de longueur ≠/2, et la rectification sera résolue :

AB = 1, AH = 2/≠ et $AB^2 = AH \cdot AK$;
d'où AK= ≠/2.



Mais qu'en est-il de la quadrature? Rappelons que nous sommes plusieurs décennies avant qu'Archimède ne démontre l'équivalence des deux problèmes. On pense donc que la proposition d'Archimède était déjà connue avant lui, même sans démonstration.

b) La duplication du cube

Le problème de la duplication du cube a une origine légendaire : à cette époque, la peste ravageait la Grèce, et les Athéniens envoyèrent une délégation au temple d'Apollon, dans l'île de Délos, pour demander au dieu comment l'épidémie pouvait être enrayée. L'oracle répondit qu'il fallait doubler l'autel cubique du temple. Les Athéniens s'empressèrent de construire un autel aux dimensions doubles, mais le fléau ne s'arrêta pas… Le problème – connu sous le nom de problème « déliaque » – consiste, étant donnée l'arête d'un cube, à construire à la règle et au compas l'arête d'un cube de volume double. Alors que la duplication du carré était résolue depuis longtemps (voir le célèbre extrait du Ménon de Platon), celle du cube résista autant que le problème de la quadrature du cercle, tant et si bien qu'on eut recours ici aussi, comme nous allons le voir, à des méthodes non orthodoxes pour le résoudre.

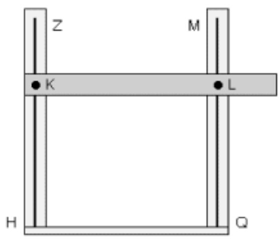
En termes numériques, la quadrature du rectangle revient à l'insertion d'une moyenne proportionnelle x entre deux nombres a et b : $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$. La duplication du cube se ramène, elle, à l'insertion de deux moyennes proportionnelles x et y entre 2 et 1 ; en effet, si on a deux nombres x et y tels que $\frac{1}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2}$, alors $\left(\frac{y}{x}\right)^3 = 2$.

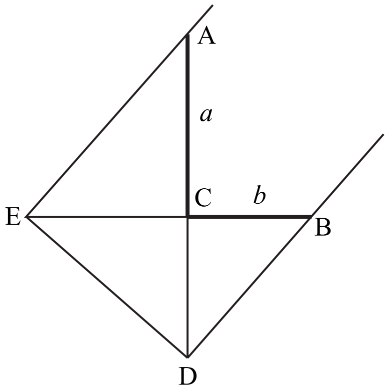
Eutochos d'Ascalon (commentateur d'Archimède et d'Apollonius au 6e s. ap. J-C) nous renseigne sur les différents moyens utilisés par les géomètres grecs pour réaliser la duplication et la trisection.

1) **Archytas de Tarente** (ca 428 av. J-C - ca 360 av. J-C) donne une solution à ce problème en considérant l'intersection de deux cylindres.

2) Selon Eutochos, **Platon** lui-même aurait imaginé un appareil permettant justement l'insertion de deux moyennes entre deux nombres a et b donnés (la duplication correspondant au cas $a = 2$, $b = 1$).

Soient deux règles KL *et* HQ *dont l'une, mobile par rapport à l'autre fixe, glisse entre les rainures des deux montants* MQ *et* ZH, *fixés perpendiculairement à la règle fixe.*





Comment utiliser cet appareil pour obtenir les deux moyennes cherchées ?

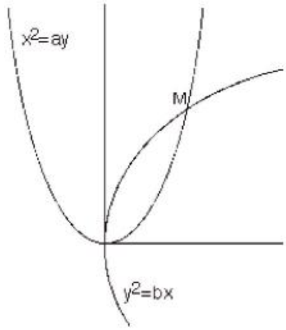
Soient [CA] et [CB] deux segments perpendiculaires, de longueurs respectives a et b. La méthode consiste à placer l'appareil de Platon sur cette figure, de façon que :
– la règle fixe [HQ] passe par B,
– la règle mobile [KL] passe par A,
– le prolongement de [CA] passe par H.

On écarte alors la règle mobile en faisant tourner l'instrument, de façon à conserver la disposition précédente, jusqu'à ce que le prolongement de [BC] passe par K.

On obtient ainsi la figure ci-dessus, où D et E coïncident respectivement avec H et K. On démontre qu'on a alors $\frac{CB}{CD} = \frac{CD}{CE} = \frac{CE}{CA}$.

Il s'agit ici d'une méthode par ajustement : on « fait bouger » l'appareil de façon à obtenir la configuration souhaitée. Un double problème se pose donc :
1° l'existence d'une telle position,
2° la façon de l'obtenir.

En fait, on peut montrer (dans la théorie) qu'on peut trouver des valeurs des paramètres (par exemple : angle de la règle [HQ] avec [CA] et distance HK) réalisant la configuration. Mais la question demeure de la détermination « pratique » de la position.



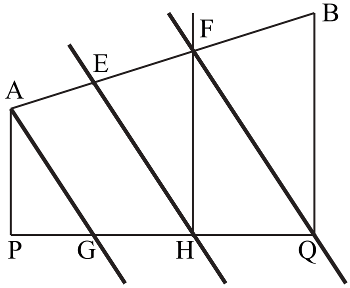
3) **Ménechme** (ca 375 av. J-C - ca 325 av. J-C), frère de Dinostrate, élève de Platon et d'Eudoxe de Cnide, découvrit les différentes coniques comme sections d'un cône par un plan perpendiculaire à une génératrice (la nature de la conique dépend alors de l'angle du cône). Il appliqua sa découverte au problème de la duplication du cube, en insérant deux moyennes entre deux nombres a et b à l'aide de deux paraboles (nous dirions maintenant qu'elles ont pour équations $x^2 = ay$ et $y^2 = bx$). Leur point d'intersection vérifie alors $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$.

4) Toujours selon Eutochos d'Ascalon, **Ératosthène** (276 av. J-C - 194 av. J-C) imagina lui aussi un instrument, le *mésolabe*, permettant l'insertion de deux moyennes entre deux nombres :

L'instrument construit est une plaquette de bois, d'ivoire ou de bronze comportant trois tablettes égales aussi minces que possible. Celle du milieu est fixe, les autres peuvent être déplacées dans des rainures(...). Pour que les segments de droite soient pris avec plus d'exactitude, il faut veiller avec soin à ce *que, dans le déplacement des tablettes, tout reste parallèle et que les différentes pièces soient parfaitement ajustées.* (Eutochos, Commentaires sur la sphère et le cylindre d'Archimède)

En voici le principe : soient deux segments parallèles [AP] et [BQ], de longueurs respectives *a* et *b*, tels que le trapèze ABPQ soit rectangle en P et Q. On place l'instrument de façon que :

– la première règle (« tablette ») passe par A,
– la troisième règle passe par Q.



Soient G et H les points respectifs où la première et la deuxième règle coupent [PQ], E le point où la deuxième règle coupe la perpendiculaire à [PQ] en G, F le point où la troisième règle coupe la perpendiculaire à [PQ] en H.

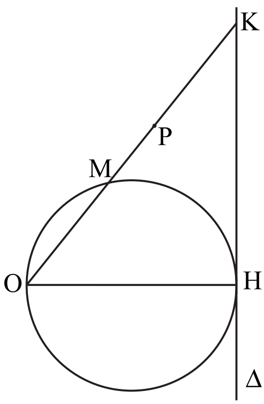
On déplace l'appareil (tout en conservant la disposition précédente) jusqu'à avoir A, E, F, B alignés. On a alors $\dfrac{BQ}{FH}=\dfrac{FH}{EG}=\dfrac{EG}{AP}$.

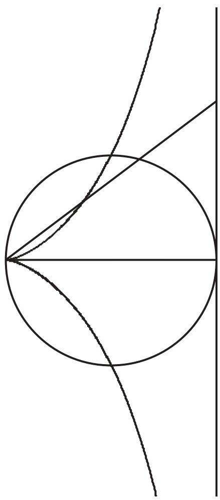
Il s'agit donc, ici encore, d'une méthode par ajustement.

5) Un peu plus tard (vers 200 av. J-C), **Dioclès** imagina une courbe permettant la duplication, qui fut plus tard baptisée cissoïde.

On considère le cercle de diamètre [OH] et la droite ∅, perpendiculaire à (OH) en H.

À tout point M du cercle on fait correspondre le point P défini de la façon suivante : la droite (OM) coupe ∅en K, et P est le point de [OI] défini par KP = OM. Lorsque M décrit le cercle, P décrit une courbe : la cissoïde.

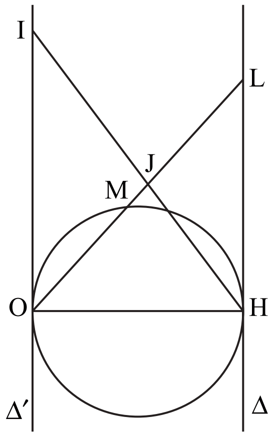




Voici l'usage qu'en fait Dioclès :

On pose OH = a. Soit maintenant la perpendiculaire $\varnothing$ à (OH) menée par O, et I l'un des deux points de $\varnothing$ tels que OI = b. La droite (IH) coupe la cissoïde en un point J, et la droite (OJ) coupe $\varnothing$ en un point L. On démontre qu'on a

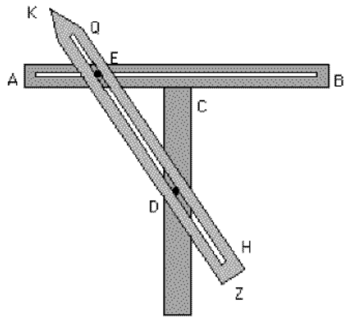
$$\left(\frac{HL}{OH}\right)^3 = \frac{b}{a}.$$



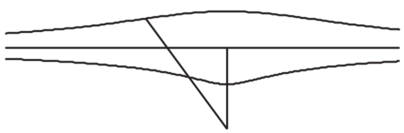
<u>Remarque</u> : D'après sa définition, le tracé de la cissoïde peut être réalisé point par point, à la règle et au compas. Mais ni Dioclès, ni ses successeurs n'ont imaginé d'appareil en permettant le tracé continu. Il faudra pour cela attendre Isaac Newton.

6) Un peu plus tard encore – toujours selon Eutochos – **Nicomède d'Alexandrie** (2^{e} s. av. J-C) imagina une courbe traçable de façon continue, la *conchoïde*, permettant de réaliser la duplication et aussi la trisection.

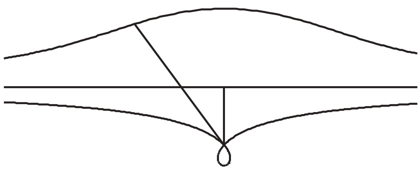
Il faut imaginer deux règles, reliées entre elles à angle droit de manière qu'elles présentent une seule surface, ainsi AB *et* CD *; dans* AB*, une rainure en forme de hache où puisse glisser un chélonion*[5] *; dans la règle* CD*, du côté de* D *et sur la droite qui divise la largeur de la règle en deux parties égales, un petit cylindre attaché à la règle et émergeant légèrement de sa surface supérieure ; une autre règle* EZ*, ayant à partir d'une petite distance de* Z *une entaille* HQ *où puisse s'engager le petit cylindre attaché en* D*, et au point* E *un trou rond où puisse passer le petit axe solidaire du chélonion parcourant la rainure dans la règle* AB. (Eutochos, Commentaires sur la sphère et le cylindre d'Archimède)



Lorsque la règle mobile pivote autour de D, son extrémité K (où est fixé un stylet touchant le sol) décrit une courbe, que Nicomède nomme *première courbe conchoïde*. D est le <u>pôle</u> de la conchoïde de la droite (AB) et EK en est le <u>paramètre</u>. En fait, la conchoïde est l'ensemble des deux arcs décrits par K et son symétrique par rapport à E.



Premier cas : EK < CD (sans point double)

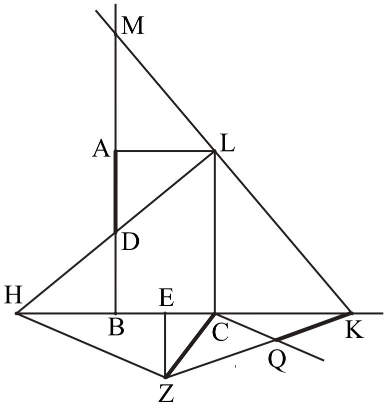


Deuxième cas : EK > CD (avec point double)

(5) cheville en écaille de tortue.

Voici (toujours d'après Eutochos) comment Nicomède utilise l'appareil pour l'insertion de deux moyennes proportionnelles :

Soient donnés deux segments de droite CL *et* LA *perpendiculaires l'un à l'autre, entre lesquels il faut trouver deux moyennes proportionnelles en proportion continue. Complétons le parallélogramme* ABCL*, divisons chacun des côtés* AB *et* BC *en deux parties égales par des points* D *et* E*, menons la droite* DL*. Soit* H *le point de rencontre entre le prolongement de* DL *et le prolongement de* CB*. Menons* EZ *perpendiculairement à* BC *et joignons* C *à un point* Z *tel que* CZ *soit égal à* AD *; menons* ZH *et la parallèle* CQ *à* ZH*.*



L'angle KCQ *étant ainsi donné, menons du point donné* Z *la droite* ZQK *de manière que le segment [intercepté]* QK *devienne égal à* AD *ou à* CZ *; on a montré en effet par la conchoïde que cela est possible. Soit* M *le point de rencontre entre le prolongement de* AB *et celui de* KL *; je dis que* CL *est à* KC *comme* KC *est à* MA *et comme* MA *est à* AL*.*

On obtient donc Q comme intersection de la conchoïde de droite (BC) et de paramètre AD avec la parallèle à (ZH) passant par C.

N.B. Apparemment, la question importante est celle de la possibilité, et pas celle de la réalisation. Il s'agit donc bien d'un problème théorique, d'où le mouvement, encore une fois, est éliminé dès que la courbe est obtenue.

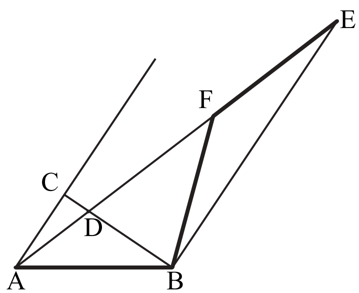
c) La trisection de l'angle

Le problème de la trisection de l'angle n'a pas d'origine légendaire, mais lui aussi devait devenir « naturellement » un sujet d'étude pour les géomètres grecs, étant donné que la bissection de l'angle se résout aisément à la règle et au compas. Là encore, les échecs répétés conduisirent à se rabattre sur des méthodes diverses…

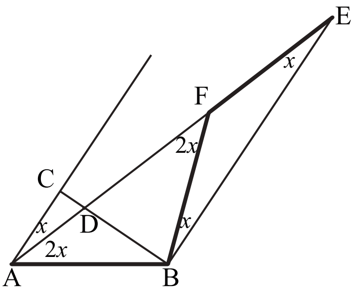
1) <u>La plus ancienne trisection connue</u> remonte au 5^{e} s. av. J-C :

Soit un angle A *à diviser en trois. Par un point* B *pris sur l'un des côtés on trace la parallèle à l'autre côté. De ce point* B *on abaisse une perpendiculaire sur l'autre côté en* C*.*

Intercalons une droite AE *telle qu'elle ait, entre son intersection* D *avec* BC *et son intersection* E *avec la parallèle menée en* B*, une longueur égale au double de* AB*. Joignons* B *au milieu* F *de* DE*…* [Rey 1948]

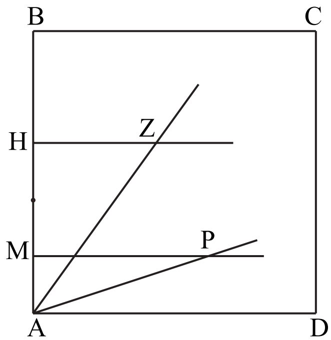


On démontre que la droite (AE) trisecte effectivement l'angle BAC donné.



Il s'agit, ici encore, d'une méthode par ajustement : on fait pivoter la droite (AE) autour de A, jusqu'à ce l'on ait DE = 2AB. L'existence et l'unicité d'une telle position proviennent de la croissance continue de la distance DE, depuis 0 (lorsque D est en B) jusqu'à l'infini (lorsque D est en C). Mais la question de la détermination de cette position n'en est pas pour autant résolue.

2) La *quadratrice*, nous l'avons dit, avait été inventée par **Hippias** pour trisecter les angles :

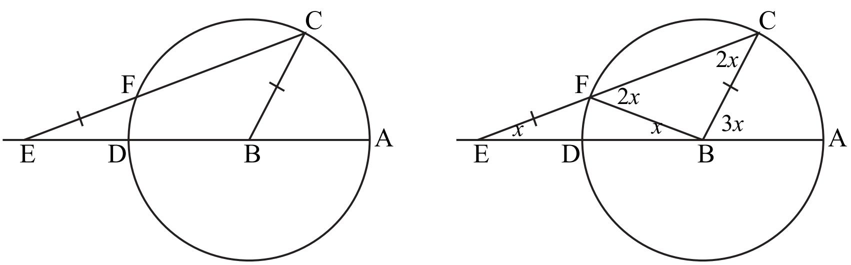


Soit un angle aigu donné (le cas d'un angle obtus s'y ramène en passant au supplémentaire). On place le sommet de l'angle en A et on fait coïncider un côté avec [AD]. L'autre côté coupe la quadratrice en Z. La parallèle à (AD) menée par Z coupe [AB] en H.

Si maintenant on place le point M de [AB] tel que AM = 1/3 AH et qu'on trace la parallèle à (AD) passant par M, cette droite coupera la quadratrice en un point P tel que DAP = 1/3 DAZ (par définition de la quadratrice).

3) **Archimède** imagina divers procédés pour résoudre le problème de la trisection. En voici un, extrait du *Livre des Lemmes* :

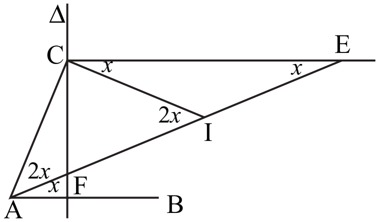
Soit ABC, *angle au centre d'une circonférence. Ses côtés* AB *et* CB *sont des rayons. On prolonge l'un pour obtenir le diamètre* AD, *et on intercale entre le prolongement* E *et la circonférence en* F *une droite passant par* C *telle que* EF *est égale au rayon.*



On démontre que l'angle DEF est le tiers de l'angle ABC.

4) La *conchoïde* de **Nicomède** permet également la résolution de la trisection de l'angle : soit BAC l'angle (aigu) à trisecter (B et C étant sur un même cercle de centre A et de rayon r).

Soit ∅ la perpendiculaire à (AB) menée par C. On considère la conchoïde de droite ∅, de pôle A et de paramètre $2r$. Soit E l'intersection de cette conchoïde avec la parallèle à (AB) menée par C, et soit F l'intersection de (AE) avec ∅ On a alors BAE = 1/3 BAC.



4- Retour sur les procédés rencontrés

Les procédés que nous venons de voir reposent :
– soit sur un <u>ajustement</u>, c'est-à-dire sur la détermination d'une position particulière d'une configuration donnée (cas des constructions de Platon, d'Archimède et du mésolabe). Dans ce cas, la <u>théorie</u> se contente d'un théorème d'existence d'une telle position (qui est implicite chez les Grecs) mais ne fournit pas pour autant de construction effective, encore moins à la règle et au compas. Dans la <u>pratique</u>, la détermination effective de cette position se fait par tâtonnements, et nécessite donc des mouvements (et des déformations) de l'instrument.
– soit sur une <u>courbe</u> particulière (conique, spirale, quadratrice, cissoïde, conchoïde, …). Dans ce cas, le point qu'on construit est obtenu comme intersection d'une courbe et d'une droite (éventuellement de deux courbes), et le théorème d'existence de ce point est, ici encore, implicite. Le mouvement évoqué n'est pas un mouvement physique – même si certains appareils permettent le tracé effectif de la courbe considérée – mais un artifice destiné à caractériser les points de cette courbe. Une fois celle-ci tracée, la construction du point cherché ne fait pas appel au mouvement.

En ce qui concerne l'obtention de la courbe, deux cas sont possibles :
– soit on dispose d'un instrument en permettant le tracé continu,
– soit on ne dispose pas d'un tel instrument.

Dans ce dernier cas, on obtiendra la courbe à partir de la détermination de quelques points (tracé « point par point »).

On a vu que dans ce cas la réalisation matérielle d'un appareil permettant le tracé (en général partiel) de la courbe n'est même pas indispensable : c'est ainsi que nous avons vu qu'il faudra attendre Newton pour disposer d'un appareil permettant le tracé de la cissoïde, imaginée 1 800 ans auparavant ; de même, le mésolabe pourrait difficilement fonctionner de manière efficace. Ces réalisations ne sont que des applications physiques d'une définition, car le problème initial n'est pas posé dans la géométrie pratique mais dans la géométrie <u>théorique</u> : un chaudronnier n'a nul besoin d'un appareil spécial pour trisecter un angle : il dispose de procédés de construction (bien sûr approchées) qui sont suffisamment opératoires (cf. *supra*).

La courbe représente <u>à la fois</u> (j'allais dire « en même temps ») toutes les positions du point ; en quelque sorte, tout se passe comme si le temps était concentré en un seul instant. Aujourd'hui, on parlerait de « lieu géométrique » ou « d'ensemble de points » : toute référence au mouvement a donc été éliminée dans le vocabulaire.

5. S'affranchir du temps

D'après ce qui précède, on voit que l'idée que la géométrie grecque classique rejette l'idée de mouvement est difficilement soutenable. La question qui se pose alors est : *De quel mouvement s'agit-il ?*

Le mouvement physique ne peut se concevoir que dans le temps, puisqu'un objet ne peut se trouver à deux endroits en même temps (le don d'ubiquité est – hélas ! – réservé aux dieux et à certains saints). Mais justement, comme nous l'avons vu, la géométrie selon Platon récuse toute référence au sensible, et en particulier doit faire abstraction de la notion de temps, puisque pour lui une science doit se placer du côté de « *ce qui existe toujours, sans avoir eu de naissance* » :

> « *Il s'efforça aussi de rendre tout cet univers éternel, dans la mesure du possible. Mais cette nature éternelle de l'animal, il n'y avait pas moyen de l'adapter complètement à ce qui est engendré. Alors il songea à faire une image mobile de l'éternité et, en même temps qu'il organisait le ciel, il fit de l'éternité qui reste dans l'unité cette image éternelle qui progresse suivant le nombre, et que nous avons appelé le temps.* » (Platon, Timée (37 c))
>
> « *Il faut d'abord, à mon avis, se poser cette double question : en quoi consiste ce qui existe toujours, sans avoir eu de naissance ? En quoi consiste ce qui devient toujours et qui n'est jamais ? Le premier est appréhensible à la pensée aidée du raisonnement, parce qu'il est toujours le même, tandis que le second est conjecturé par l'opinion accompagnée de la sensation irraisonnée, parce qu'il naît et périt, mais n'existe jamais réellement.* » (Platon, Timée (27 c))

Par conséquent, une véritable science doit s'affranchir du temps.

Les Éléates, prédécesseurs de Platon, vont même apparemment jusqu'à récuser la notion de mouvement, puisque, selon Zénon d'Élée (ca 485 av. J-C - ?) et son école, la flèche n'atteindra jamais la cible et Achille ne rattrapera jamais la tortue. En fait, il faut plutôt y voir, selon Bkouche ([Bkouche 2000] p. 618), la mise en cause du <u>langage</u> en tant que moyen pour exprimer le mouvement. Avec pour corollaire : puisque la rationalité passe obligatoirement par le langage et puisque le langage ne peut exprimer convenablement le mouvement, le mouvement ne peut être un objet de science.

Pour Szabó, à cause justement de ce refus du mouvement, « *la philosophie éléate a joué un rôle essentiel dans le développement des mathématiques grecques, et surtout dans la naissance du système géométrique présenté par les Eléments euclidiens*. » ([Szabó], p. 248)

La notion de déplacement, sous-jacente au principe de superposition utilisé par Euclide, fait appel au mouvement, mais elle ne s'y réduit pas. En effet, Raoul Bricard explicite ce qui les différencie :

> « *On appelle déplacement toute opération qui fait passer un corps d'une position à une autre. Un déplacement résulte toujours dans la pratique d'un mouvement* (…). *Un déplacement donné peut être réalisé par une infinité de mouvements différents entre eux, soit par leurs définitions géométriques, soit par leurs lois du temps.* » ([Bricard 1947, p. 1)

Ainsi, le déplacement ne tient compte que de la position initiale et de la position finale du corps, indépendamment de la trajectoire suivie et de la vitesse (donc du temps). On voit ici se profiler la notion de transformation telle que nous l'enseignons aujourd'hui et, en particulier, en ce qui nous concerne, celle d'isométrie, qu'on peut considérer comme une « *stratification du mouvement* » ([Bkouche 2000] p. 625). Cette distinction entre déplacement et mouvement est, pour Bkouche, « *l'un des objectifs de l'enseignement de la géométrie élémentaire* » ([Bkouche 2000] p. 626), et elle ne peut prendre sens que si l'élève a rencontré les isométries comme cas particuliers de <u>véritables</u> transformations, c'est-à-dire qui modifient non seulement la position, mais également la forme (comme l'inversion ou la perspective conique). Platon déjà distinguait les deux types de mouvements :

> Parménide : *Parce que si [l'un] était en mouvement, il se déplacerait ou changerait, car il n'y a que ces deux sortes de mouvement.*
> Aristote : *Sans doute.*
> Parménide : *Et que s'il changeait de nature, l'un ne pourrait plus être un, n'est-ce pas ?*
> Aristote : *Il ne le pourrait plus.*
> Parménide : *Il ne se meut donc que par altération.*
> Aristote : *Évidemment non.*
> Parménide : *Mais alors, est-ce par changement de lieu ?*
> Aristote : *Peut-être.* (Parménide, 138 b)

6. Conclusion

Il y a plus d'un siècle déjà, Jules Houël estimait nécessaire de faire une mise au point :

> « *C'est par suite d'une confusion d'idées que plusieurs géomètres veulent bannir des éléments de géométrie la considération du mouvement.*
> *L'idée du mouvement, abstraction faite du temps employé à l'accomplir, c'est-à-dire l'idée du mouvement géométrique, n'est pas une idée plus complexe que celle de grandeur ou d'étendue.* (…) *Ce mouvement géométrique, qu'une équivoque de langage a fait confondre avec le mouvement dans le temps, objet de la cinématique, ne peut pas dépendre d'une autre science que la géométrie pure.* » ([Houël 1867] p. 59)

Dans notre enseignement de la géométrie, il nous arrive souvent d'utiliser un vocabulaire évoquant ce « mouvement », en particulier à propos des transformations (« translation », « rotation ») et des lieux (« tel point <u>décrit</u> telle courbe »). De même, avec les logiciels de géométrie « dynamique », les élèves réalisent effectivement des déplacements d'objets géométriques, que ce soit pour rechercher des lieux, pour conjecturer des propriétés ou pour vérifier la pertinence de leurs constructions. Le temps intervient bien sûr dans les déplacements à l'écran, mais il n'est pas pris en compte en tant qu'élément pertinent de la recherche : que le mouvement soit lent ou rapide, brusque ou régulier, ne changera en aucune façon les conclusions qui seront tirées. En fait, on peut réellement parler en géométrie, à l'époque des la Grèce classique comme de nos jours, d'un « *mouvement sans le temps* », selon l'expression de Bkouche.

Bibliographie

ARTHOT Fernand & MANSION Paul (1982) : *Courbes usuelles. Tracés géométriques*. Éd. Casteilla, Paris.

BARBIN Évelyne (1991) : *Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie. Sens de la démonstration et objet de la géométrie*, in « La démonstration mathématique dans l'histoire » (p. 57-79). Éd. IREM de Besançon et IREM de Lyon.

BATHIER-FAUVET Michèle (1997) : *La méthode des pesées chez Archimède*, in Actes du colloque « L'Océan Indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes » (p. 273-294). Éd. IUFM de la Réunion.

BETTINELLI Bernard (1991) : *Intuition et démonstration chez Archimède*, in « La démonstration mathématique dans l'histoire » (p. 181-196). Éd. IREM de Besançon et IREM de Lyon.

BKOUCHE Rudolf & DELATTRE Joëlle (1993) : *Quand mouvement et géométrie se retrouvent*, in « Histoires de problèmes, histoire des mathématiques » (p. 139-154). Éd. Ellipses, Paris.

BKOUCHE Rudolf (2000) : *Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles*, in Bulletin de l'APMEP nº 430, p. 613-629.

BRICARD Raoul (1947) : *Cinématique et mécanismes*. Éd. Armand Colin, Paris.

CARRÉGA Jean-Claude (1981) : *Théorie des corps. La règle et le compas*. Éd. Hermann, Paris.

COLLETTE Jean-Paul (1973) : *Histoire des mathématiques*, vol. 1. Éd. du Renouveau Pédagogique, Montréal. Diff. Vuibert, Paris.

DELATTRE Joëlle & BKOUCHE Rudolf (1993) : Pourquoi la règle et le compas ?, in « Histoires de problèmes, histoire des mathématiques » (p. 87-112). Éd. Ellipses, Paris.

EUCLIDE : *Les Éléments*, Traduction et présentation : George J. Kayas. Éd. CNRS, Paris 1978.

HOUËL Jules (1867) : *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire*. Éd. Gauthier-Villars, Paris.

PLATON : *La République*. Traduction : Robert Baccou. Éd. Garnier-Flammarion, Paris 1966.

PLATON : *Parménide*. Traduction : Emile Chambry. Éd. Garnier-Flammarion, Paris 1967.

PLATON : *Timée*. Traduction : Emile Chambry. Éd. Garnier-Flammarion, Paris 1969.

REY A. (1948) : *L'apogée de la science technique grecque*. Essor de la mathématique. Paris.

SZABÓ Árpád (2000) : *L'aube des mathématiques grecques*. Éd. Vrin, Paris.