

Intervalle de confiance (suite et fin?)

Dans le Bulletin n° 427 (mars-avril 2000), p. 141-170, Louis-Marie Bonneval s'intéresse à l'intervalle de confiance pour l'estimation de la probabilité p inconnue d'un événement aléatoire à partir de la réalisation de n expériences indépendantes dans lesquelles l'événement est apparu avec une fréquence f . Il propose les deux conjectures suivantes :

1) Pour tout naturel $n > 0$, et pour tout p réel de $[0,1]$:

$$\mathbb{P}\left\{|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} > 0.9,$$

résultat facile à mémoriser pour un élève débutant en statistique inférentielle.

2) Pour tout naturel $n > 20$, et pour tout p réel de $[0,1]$:

$$\mathbb{P}\left\{|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} > 0.93,$$

et suggère de travailler sur le niveau 0.93.

Daniel Saada (dsaada@yahoo.fr – Lycée Hoche, Versailles –) nous a adressé le 17 février 2001 une étude relative au cas particulier $p = 0.5$ et $n = 4k^2$, k naturel. Il obtient alors :

$$\mathbb{P}\left\{|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} > 0.915,$$

Par ailleurs, il montre, toujours dans le cas particulier $p = 0.5$ que, pour $n > 5$:

$$P\left\{|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} > 0.929.$$

De son côté, Christian Maillard (840 b , avenue des Serrets, 0410 Manosque) nous a adressé le 6 août 2001 la démonstration des inégalités ci-dessous qui incluent les conjectures de L.-M. Bonneval :

Pour tout p réel de $[0,1]$,

pour tout naturel n supérieur à 552,

$$P\left\{|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} > 0.95 ;$$

pour tout naturel n supérieur à 56,

$$P\left\{|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} > 0.94 ;$$

pour tout naturel n supérieur à 20,

$$P\left\{|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} > 0.93 ;$$

et enfin, pour tout naturel n non nul,

$$P\left\{|f - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} > 0.9.$$

Cette démonstration s'accompagne d'une analyse très précise de l'approximation de la loi binomiale par la loi de Laplace-Gauss.

Les études très techniques de nos deux collègues, dans lesquelles ils montrent l'un et l'autre une prodigieuse habileté d'analyste et de calculateur, sont à la disposition de nos lecteurs sur le serveur de l'APMEP.