

Olympiades de mathématiques

(suite)

Le précédent bulletin 435 a présenté les énoncés de l'Olympiade 2001 (Washington (U.S.A.), 01 - 14 juillet) et les solutions des trois premiers problèmes de l'Olympiade 2000 (Séoul-Taejon (Corée), 13 - 25 juillet) avec des commentaires sur les résultats des candidats français. Nous poursuivons ici avec les solutions des trois derniers problèmes de l'Olympiade 2000 (deuxième jour : 20 juillet). La liste des 16 lecteurs m'ayant adressé 45 solutions de ces 6 problèmes d'Olympiade figure dans le précédent bulletin.

Problème 4

Un magicien a cent cartes numérotées de 1 à 100. Il les répartit dans trois boîtes, une rouge, une blanche et une bleue, de telle sorte que chaque boîte contienne au moins une carte.

Un spectateur choisit deux de ces trois boîtes, tire une carte dans chacune d'elles et annonce la somme des nombres figurant sur les cartes tirées. Connaissant cette somme, le magicien identifie la boîte dans laquelle aucune carte n'a été tirée.

De combien de façons le magicien peut-il répartir les cartes dans les boîtes de telle sorte que ce tour de magie réussisse toujours ? (Deux façons de répartir les cartes sont considérées comme différentes si au moins une carte est placée dans deux boîtes différentes).

Solution

Cet énoncé était-il facile ? Il est facile de faire quelque chose, bien le faire n'est pas si facile que cela, mais Claude Deschamps déplore que les candidats français n'aient pas su l'aborder : « devant des problèmes où seules comptent observation, expérimentation, ... ils ont été totalement désarmés », écrit-il dans son rapport. « Afin de comprendre les mauvais résultats de nos candidats nous avons comparé leurs copies et leurs brouillons avec ceux de certains pays, en particulier avec ceux de pays qui, clairement, ne pratiquent pas une sélection forcenée, par exemple le Mexique. Sur le problème 4, le problème du magicien, c'est particulièrement frappant (mais le fait se retrouve dans tous les problèmes) ; il est clair que dans ce texte il faut manipuler les cartes, essayer... Que constate-t-on ? Nos candidats n'essayaient pas ; ils citent des résultats (" on pourrait peut-être utiliser des formules de combinatoire ", " on pourrait essayer le principe des tiroirs ", ...), ils cherchent à se raccrocher à une formule, pour eux les mathématiques sont des boutons sur lesquels on appuie pour avoir un résultat. Au contraire toutes les copies des jeunes candidats du Mexique sont couvertes de tentatives plus ou moins maladroites : on prend un jeu de 10 cartes, on pose le 1, puis le 2... Il n'y a jamais appel à une théorie

mais une volonté de chercher en expérimentant. Bilan : 14 points pour nos six candidats et 22 points pour les jeunes du Mexique (qui se retrouve avant nous au classement général !). Il est d'ailleurs frappant de voir que les deux problèmes où nous avons perdu le plus de points sont les deux plus faciles de l'Olympiade : le premier où nous nous classons 51^e et le quatrième où nous nous classons 55^e ».

Il y a là un vrai problème sur le contenu de l'enseignement, et Claude Deschamps est bien placé pour faire entendre son avis. Cela dépasse même peut-être la question de l'enseignement, car notre manière d'aborder les problèmes de la vie pratique varie vraisemblablement d'une culture à l'autre. Les clubs et les compétitions que s'efforce de promouvoir Animath ne peuvent que favoriser l'approche expérimentale des mathématiques, ce qui, je l'espère, profitera à l'enseignement dans son ensemble.

Pour en revenir à notre problème 4, il est facile de voir comment on doit répartir les cartes, il est assez difficile de rédiger proprement une démonstration qu'il n'existe pas d'autre possibilité : deux des cinq lecteurs qui ont abordé ce problème n'ont pas fourni de telle démonstration (« on montre assez facilement que... » écrit l'un d'eux). La démonstration proposée par les auteurs de l'énoncé distingue *a priori* le cas où il existe trois cartes consécutives dans trois boîtes différentes, et celui où il n'existe pas trois cartes consécutives dans trois boîtes différentes. J'opterai plutôt pour la démonstration plus élémentaire proposée indépendamment par Marie-Laure Chaillout et Pierre Bornsstein, consistant à étudier les couleurs des trois premières cartes.

Soit A la boîte contenant la carte 1. La carte 2 peut-elle être dans la même boîte A ? Si tel est le cas, appelons m la plus petite carte qui soit dans une boîte autre que A (boîte que nous appellerons B), et n la plus petite carte de la troisième boîte C. La carte $(n - 1)$ ne peut être que dans A ou B.

- Mais si $(n - 1)$ est dans A, $m + n - 1$ peut être obtenu soit comme $(n - 1) + m$ (boîtes A et B), soit comme $n + (m - 1)$ (boîtes C et A), ce qui fait rater le tour.

- Et si $(n - 1)$ est dans B (ce qui inclut le cas $n - 1 = m$), $n + 1$ peut être obtenu soit comme $n + 1$ (boîtes C et A), soit comme $(n - 1) + 2$ (boîtes B et A).

La carte 2 ne peut donc pas être dans la même boîte que la carte 1 : appelons B la boîte contenant la carte 2.

La carte 3 peut-elle être dans la boîte A ? Non, pour la même raison. Appelons n la plus petite carte de la boîte C.

- Si la carte $(n - 1)$ est dans B, $n + 2$ s'obtient soit comme $n + 2$ (boîtes C et B), soit comme $(n - 1) + 3$ (boîtes B et A), et

- si la carte $(n - 1)$ est dans A (ce qui inclut le cas $n = 4$), alors $n + 1$ s'obtient soit comme $n + 1$ (boîtes C et A), soit comme $(n - 1) + 2$ (boîtes A et B).

Donc la carte 3 ne peut être que dans B ou dans C.

Si la carte 3 est dans B, appelons n la plus petite carte de C.

- Si $n \geq 99$, la carte $(n + 1)$ existe et peut être soit dans A, soit dans B, soit dans C. Chacune de ces trois éventualités conduit à une impossibilité : si $(n + 1)$ est dans A, $n + 3 = (n + 1) + 2$ (boîtes A et B) = $n + 3$ (boîtes C et B). Sinon, $n + 2 = (n + 1) + 1$

(boîtes (B ou C) et A) = $n + 2$ (boîtes C et B).

Donc $n = 100$: la boîte C ne contient qu'une seule carte, la carte 100.

- La carte 99 est nécessairement dans B, sinon $101 = 100 + 1$ (boîtes C et A) = $99 + 2$ (boîtes A et B).

- En outre, la boîte A ne contient elle aussi qu'une seule carte, la carte 1 : sinon, appelons m la plus petite carte de A autre que 1. La carte $m - 1$ étant dans B, $m + 99 = m + 99$ (boîtes A et B) = $(m - 1) + 100$ (boîtes B et C).

On a donc nécessairement : la carte 1 dans A, la carte 100 dans C, et toutes les autres, de 2 à 99, dans B.

Et on vérifie que cela convient : tout résultat strictement inférieur à 101 correspond à une carte de A (la carte 1) plus une carte de B, 101 correspond à une carte de A (1) plus une carte de C (100) et tout résultat strictement supérieur à 101 correspond à une carte de B plus une carte de C (100). Mais il existe six manières d'attribuer les lettres A, B et C aux trois boîtes rouge, blanche et bleue, ce cas-là nous offre donc six solutions.

Reste le cas où 1 est dans A, 2 dans B et 3 dans C. $5 = 2 + 3 = 1 + 4$: pour que cela ne conduise pas à une impossibilité, il est nécessaire que la carte 4 soit dans la même boîte A que la carte 1. Pour la même raison, il est nécessaire que la carte 5 soit dans la même boîte que la carte 2, et plus généralement : si les cartes $n - 2$, $n - 1$ et n sont dans trois boîtes distinctes ($n \leq 99$), du fait que $2n - 1 = (n - 1) + n = (n - 2) + (n + 1)$, il est nécessaire que la carte $(n + 1)$ soit dans la même boîte que la carte $(n - 2)$, ce qui entraîne que les cartes $(n - 1)$, n et $(n + 1)$ sont elles aussi dans trois boîtes distinctes. Par récurrence, on en conclut que les cartes $(3k + 1)$ sont toutes dans la même boîte A que la carte 1, les cartes $(3k + 2)$ sont toutes dans le même boîte B que la carte 2 et les cartes $(3k)$ sont toutes dans la même boîte C que la carte 3, ce qui conduit encore à 6 solutions, étant donné les six manières d'attribuer les lettres A, B et C aux trois boîtes rouge, blanche et bleue. Une fois encore, on vérifie que cela convient : une somme multiple de 3 ne peut provenir que de A et B, une somme $(3k + 1)$, de A et C et une somme $(3k + 2)$ de B et C.

Pour que le tour de magie réussisse toujours, le magicien peut répartir les cartes dans les boîtes de 12 façons différentes.

Problème 5

Existe-t-il un entier strictement positif n tel que : n soit divisible par exactement 2 000 nombres premiers distincts et $2^n + 1$ soit divisible par n ?

Solution

LEMME

Si $n \geq 3$ divise $2^n + 1$ et s'il existe un nombre premier p qui divise $2^n + 1$ et ne divise pas n , alors np divise $2^{np} + 1$ et il existe un nombre premier qui divise $2^{np} + 1$ et ne divise pas np .

La première partie du lemme est immédiate : np , le PPCM de n et p , divise

$2^n + 1$, qui lui-même divise $2^{np} + 1$ puisque p est impair.

Pour la seconde, posons plus précisément : $2^{np} + 1 = (2^n + 1) \cdot A$, avec $A = 2^{(p-1)n} - 2^{(p-2)n} + \dots - 2^n + 1$. A est la somme de p termes qui sont chacun congru à 1 modulo $(2^n + 1)$, donc $A \equiv p \pmod{2^n + 1}$, $A = (2^n + 1)K + p$, et p divise A puisqu'il divise $2^n + 1$: p est même le seul diviseur commun de A et $(2^n + 1)$. Mais p^2 ne divise pas A . En effet, appelons p^i ($i \geq 1$) la plus grande puissance de p divisant $2^n + 1$. On a : $2^n = -1 + a \cdot p^i + B \cdot p^{i+1}$ ($1 \leq a \leq p - 1$). Donc, par simple application de la formule du binôme :

$$\begin{aligned} 2^{np} &= -1 + p(ap^i + Bp^{i+1}) + \sum_{2 \leq k \leq p} C_k^p (ap^i + Bp^{i+1})^k (-1)^{p-k} \\ &= -1 + a \cdot p^{i+1} + C \cdot p^{i+2}, \end{aligned}$$

car tous les $C_k^p (ap^i + Bp^{i+1})^k$, pour $k \geq 2$, sont divisibles par p^{i+2} , C_k^p étant divisible par p et p^k par p^{i+1} . Il en résulte que $2^{np} + 1$ n'est pas divisible par p^{i+2} alors que $2^n + 1$ est divisible par p^i , leur quotient A n'est donc pas divisible par p^2 .

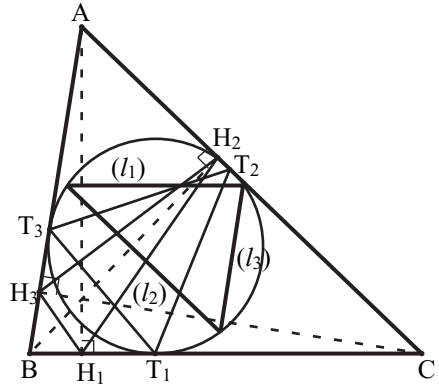
Or $A > p$ vu que $2^{np} + 1 \geq (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1)$ et $2^{2n} - 2^n + 1 > 2^{n+1} - 2^n + 1 = 2^n + 1 \geq p$. Donc A possède au moins un diviseur premier autre que p , lequel ne divise pas n puisqu'il ne divise pas 2^{n+1} .

À partir de ce lemme, il est facile de construire par récurrence deux suites n_k et p_k telles que $n_{k+1} = n_k p_k$, vérifiant : n_k possède exactement k facteurs premiers, p_k premier ne divise pas n_k mais p_k et n_k divisent $(2^{n_k} + 1)$. Il faut poser $n_1 = 9$ pour trouver p_1 (en l'occurrence 19), on pourrait même prouver plus généralement que si $n \neq 3$ divise $(2^n + 1)$, n est divisible par 9. Quant à la récurrence, il est immédiat que n_{k+1} possède un facteur premier de plus que n_k , et d'après le lemme, $2^{n_{k+1}} + 1$ est divisible par n_{k+1} et possède un nouveau facteur premier p_{k+1} ne divisant pas n_{k+1} . En fin de compte, si l'on pose $n = n_{2000}$, n est divisible par exactement 2 000 nombres premiers distincts et $2^n + 1$ est divisible par n , ce qui achève la démonstration.

L'important était de faire le bon choix : la réponse est OUI. D'ailleurs, pour ce genre de problème, la réponse NON est généralement plus difficile à établir que la réponse OUI. Cela étant, la solution des auteurs du problème (recopiée par l'un des lecteurs de la rubrique) ainsi que les autres solutions reçues (l'une d'elles s'inspire des problèmes 1/9 et 1/20 des 250 problèmes de théorie élémentaire des nombres de Sierpinski) s'appuient sur d'autres suites. En particulier, la suite $n_k = 2^{3^k} + 1$: par une démonstration voisine de celle ci-dessus, n_k est divisible par 3^{k+1} et admet un nombre croissant de facteurs premiers lorsque k augmente. Si, pour un k donné, n_k admet au moins 1 999 facteurs premiers distincts $p_1, p_2, \dots, p_{1999}$ autres que 3, alors il suffit de poser : $n = 3^k p_1 p_2 \dots p_{1999}$ pour avoir : n divise $2^n + 1$ (puisque'il divise $2^{3^k} + 1$), et n possède exactement 2 000 facteurs premiers distincts.

Problème 6

Soient AH_1, BH_2, CH_3 les hauteurs d'un triangle ABC dont tous les angles sont aigus. Le cercle inscrit dans le triangle ABC est tangent respectivement aux côtés BC, CA, AB en T_1, T_2, T_3 . On désigne respectivement par l_1, l_2, l_3 les symétriques des droites H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 par rapport aux droites T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 . Montrer que l_1, l_2, l_3 déterminent un triangle dont les sommets appartiennent au cercle inscrit dans le triangle ABC .



Solution

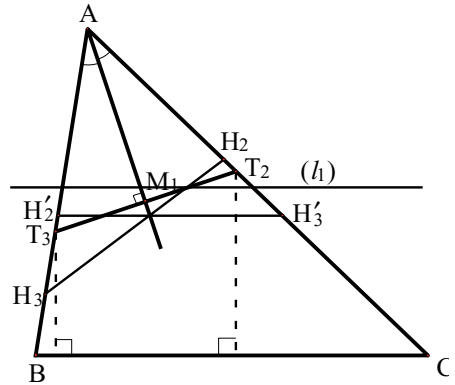
Ce problème, assez déroutant à première vue, devient abordable dès que l'on fait la constatation suivante :

Les droites $(l_1), (l_2), (l_3)$ sont parallèles respectivement à $(BC), (CA), (AB)$.

Une des démonstrations possibles consiste à faire intervenir le milieu M_1 de T_2T_3 . Le triangle AT_2T_3 étant isocèle, (AM_1) est bissectrice de \widehat{BAC} et perpendiculaire à (T_2T_3) , donc la symétrique de (l_1) par rapport au point M_1 est la symétrique $(H'_2H'_3)$ de (H_2H_3) par rapport à (AM_1) . Or dans les triangles rectangles AH_2B et AH_3C ,

$$\frac{AH_2}{AB} = \frac{AH_3}{AC} = \cos \hat{A},$$

si l'on appelle $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ les trois angles du triangle ABC . De sorte que $A H'_2H'_3$ est homothétique de ABC dans l'homothétie de centre A et de rapport $\cos \hat{A} : (H'_2H'_3)$ est donc parallèle à (BC) , et par suite (l_1) , symétrique de $(H'_2H'_3)$ par rapport à M_1 , l'est également.



C'est là que les méthodes divergent : en raison de ce parallélisme, les trois droites $(l_1), (l_2), (l_3)$ déterminent un triangle homothétique de ABC . Pour que ses sommets appartiennent au cercle inscrit dans ABC , il faut et il suffit que l'homothétie en question transforme le cercle circonscrit à ABC (de centre O et de rayon R) en son cercle inscrit (de centre I et de rayon r), en d'autres termes que (l_1) (resp. (l_2) et (l_3)) soit l'image de (BC) (resp. (CA) et (AB)) dans l'homothétie de rapport $(-r/R)$ qui transforme O en I , et ceci peut s'établir de plusieurs manières au moyen de calculs trigonométriques : c'est manifestement la méthode la plus sûre et la plus utilisée,

même le lecteur qui a recopié l'une des solutions proposées par les auteurs du problème a opté pour celle-ci. Mais il existe également une solution purement géométrique.

Commençons par la solution trigonométrique, en utilisant les notations traditionnelles : $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$, $a + b + c = 2p$. Plaçons un repère orthonormé dont (BC) soit l'axe des abscisses et dont l'axe des ordonnées passe par A , l'ordonnée de A étant :

$$y_A = b \cdot \sin \hat{C} = c \cdot \sin \hat{B} = \frac{bc}{2R}.$$

L'homothétie de centre A et de rapport $\cos \hat{A}$ transformant ABC en $A H_2 H_3$, tout point de la droite $(H_2 H_3)$ a pour ordonnée : $y_H = (1 - \cos \hat{A}) y_A$. Par ailleurs, M_1 étant le milieu de $T_2 T_3$, son ordonnée y_M est la demi-somme des ordonnées de T_2 et de T_3 :

$$y_M = \frac{1}{2} [(p-c) \sin \hat{C} + (p-b) \sin \hat{B}] = \frac{1}{4R} [(p-c)c + (p-b)b].$$

Comme (l_1) est symétrique de $(H_2 H_3)$ par rapport à M_1 , tout point de (l_1) a pour ordonnée y_l tel que : $y_l + y_H = 2y_M$, soit

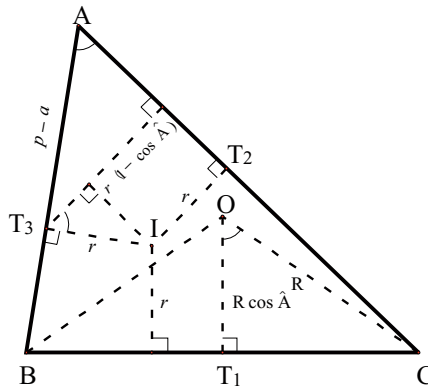
$$y_l = \frac{1}{4R} [(a+b-c)c + (a-b+c)b - 2bc(1 - \cos \hat{A})].$$

Or : $c^2 + b^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A} = a^2$, donc :

$$y_l = \frac{1}{4R} [a(c+b-a)] = (p-a) \sin \hat{A}.$$

Par ailleurs, les ordonnées de O et I étant respectivement $R \cos \hat{A}$ et r , l'homothétie de rapport $(-r/R)$ qui transforme O en I transforme (BC) en la droite

d'équation $y = r(1 + \cos \hat{A})$: c'est bien la droite (l_1) , vu que $(p-a) \sin \hat{A} = \text{distance de } T_3 \text{ à } (AC) = r(1 + \cos \hat{A})$.



L'utilité du repère est seulement d'éviter toute question du type : tel et tel point sont-ils du même côté de telle droite ? Marie-Laure Chaillout rédige une démonstration très voisine en termes de barycentres de points de la droite (AI) , et elle signale que le résultat reste vrai même si le triangle ABC n'a pas tous ses angles aigus, pour peu qu'il ne soit pas rectangle. Plusieurs solutions introduisent d'emblée l'homothétie de rapport $(-r/R)$ qui transforme O en I et le triangle ABC en un triangle $A'B'C'$; par différents calculs, on montre que la distance de T_2 à $(B'C')$ est la même que la distance de T_2 à $(H_2 H_3)$, ce qui prouve que T_2 appartient à une bissectrice de ces deux droites : comme on peut en dire autant de T_3 et que T_2 et T_3

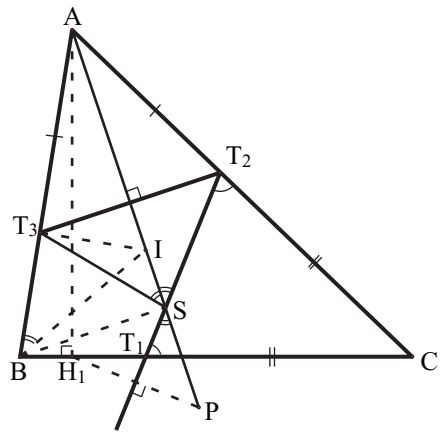
sont dans le même secteur angulaire défini par ces deux droites, ces deux droites sont symétriques par rapport à (T_2T_3) , ce qui suffit à conclure.

Les anciens savent que (H_2H_3) est perpendiculaire à (AO) , (AO) et (AH) sont isogonales ; ils utilisent l'antiparallélisme des droites (l_1) et (H_2H_3) par rapport à (AB) et (AC) ... Edgard Delplanche calcule la distance à (H_2H_3) du symétrique de I par rapport à (T_2T_3) . La droite (l_1) coupant AB et AC en V et U , Jacques Bouteloup s'appuie sur l'égalité des birapports $(A, H_2, T_2, U) = (A, H_3, T_3, V)$ pour positionner (l_1) , et René Manzone sur le fait que (H_2H_3) (resp. (T_2T_3)) coupe (BC) en K (resp. V), conjugué harmonique de H_1 (resp. T_1) par rapport à B et C .

C'est Pierre Bornsztein qui se rapproche le plus de la seule démonstration géométrique que je connaisse, celle proposée par les auteurs du problème, à savoir : la symétrie par rapport à (AI) échange T_2 et T_3 , mais elle transforme T_1 en un point T'_1 , qui appartient manifestement au cercle inscrit. De même, les symétries par rapport à (BI) et (CI) transforment T_2 et T_3 respectivement en T'_2 et T'_3 . On va prouver que les droites (l_1) , (l_2) , (l_3) sont précisément les droites $(T'_2T'_3)$, $(T'_3T'_1)$, $(T'_1T'_2)$. Et pour cela, un lemme :

Le symétrique de H_1 par rapport à (T_1T_2) appartient à (AI) . \hat{A} , \hat{B} , \hat{C}

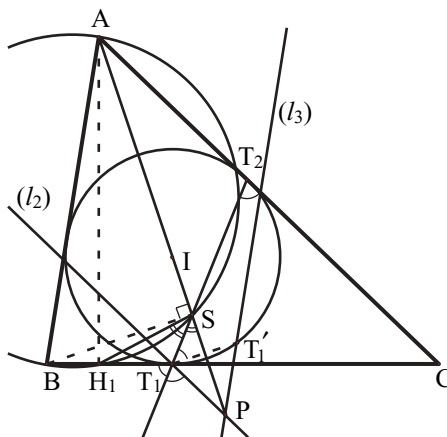
Introduisons deux points : S , intersection de (AI) et (T_1T_2) , et P , intersection de (AI) et de la perpendiculaire à (T_1T_2) passant par H_1 , et démontrons que P est le symétrique de H_1 par rapport à (T_1T_2) , en d'autres termes que l'angle $\widehat{H_1SP}$ est le double de l'angle $\widehat{T_1SP}$. Il faut en fait étudier deux cas de figure, suivant que l'angle \hat{B} est inférieur ou supérieur à l'angle \hat{C} : en positionnant le point I par rapport à (AH_1) , on voit que S et P sont de part et



d'autre de BC , S intérieur au triangle si $\hat{B} > \hat{C}$, extérieur sinon. Maintenant, considérons le triangle AST_2 : l'angle $\widehat{ST_2C}$ (qui vaut $(\neq - \hat{C})/2$) est la somme de l'angle $\widehat{SAT_2}$ (qui vaut $\hat{A}/2$) et de l'angle $\widehat{AST_2}$, qui vaut donc $\hat{B}/2$. Par symétrie, $\widehat{IST_3}$ vaut lui aussi $\hat{B}/2$, soit la même chose que $\widehat{IBT_3}$, d'où l'on déduit que S, B, T_3 et I sont cocycliques, ce qui entraîne que l'angle \widehat{BSI} est droit puisque l'angle $\widehat{BT_3I}$ est droit. Mais cela implique également que S, H_1, A et B sont cocycliques,

donc que les angles de droites (H_1S, SA) et (H_1B, BA) sont égaux. Comme $\widehat{T_1SP} = \hat{B}/2$, ST_1 est une bissectrice de l'angle (H_1S, SA) , P est bien le symétrique de H_1 par rapport à (T_1T_2) .

Il en résulte que la droite (l_3) est la parallèle à (AB) passant par P . Or le triangle CT_1T_2 étant isocèle, (T_1P) , symétrique de (T_1C) par rapport à (T_1T_2) , est parallèle à (T_2C) , donc à (AC) . La symétrie par rapport à (AI) , qui transforme (AC) en (AB) , transforme (T_1P) , parallèle à (AC) , en une parallèle à (AB) passant par P , donc en (l_3) . (l_3) passe donc par T'_1 , symétrique de T_1 par rapport à (AI) . Comme le même raisonnement vaut pour (l_2) , T'_1 est l'un des sommets du triangle formé par (l_1) , (l_2) et (l_3) , et on peut en dire autant de T'_2 et T'_3 : tous trois sont bien sur le cercle inscrit dans ABC .



Cette intéressante configuration mériterait d'être approfondie, et Marie-Laure Chaillout remarque, à l'issue d'un calcul analytique, une propriété qu'elle ne parvient pas à justifier géométriquement : appelons Q_1, Q_2, Q_3 les intersections respectives de (T_2T_3) et (H_2H_3) , (T_3T_1) et (H_3H_1) , (T_1T_2) et (H_1H_2) . A, Q_2 et Q_3 sont alignés, et les quatre droites (AQ_1) , (AQ_2) , (AB) et (AC) forment un faisceau harmonique. De fait, un changement de signe suffit pour passer de l'équation barycentrique de (H_2H_3) (resp. (T_2T_3)) à celles de (H_3H_1) ou (H_1H_2) (resp. (T_3T_1) ou (T_1T_2)). Mais cette configuration fait surgir un quatrième point Q_0 (car les huit changements de signes possibles définissent quatre points) dont l'interprétation géométrique reste à préciser.

Erratum

Dans l'énoncé 1 des olympiades 2001 publiées dans le précédent bulletin 435, il faut montrer que $CAB + COP < 90^\circ$ et non pas $CAP + COP > 90^\circ$.