Harmonie et semi-harmonie

Henri Bareil(*)

• Le numéro d'avril 2001 de « MATHS-JEUNES », revue de nos sympathiques amis belges de la SBPMef proposait, en problème n° 11, d'un rallye de 15 problèmes, le texte suivant :

> « Démontrer que l'égalité suivante est correcte :
>
> $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{465}-\frac{1}{466}=\frac{1}{234}+\frac{1}{235}+\frac{\ }{2}\text{ ».}$$

Maint collègue peut reconnaître là (surtout s'il enseigne en TS ou au-delà), un premier membre qui relève de la suite « semi-harmonique » ou « harmonique alternée », formée par addition de termes $\frac{(-1)^n}{n+1}$ à partir de $n = 0$, et un second membre qui relève de la « suite harmonique », formée par addition des $\frac{1}{n+1}$ à partir de $n = 0$, ici amputée de tout un début.

• J'ignore réponses et comportement des élèves belges (ou autres) qui ont concouru, mais il m'a semblé qu'il pourrait être intéressant, dès le Collège, de s'attaquer à ce problème (ou à des variantes) en y mettant en jeu des méthodes générales.
De là la progression suivante qui s'arrête au bord de toute théorie sur les deux suites en jeu : on trouvera celle-ci dans les manuels les plus courants.

I. Une recherche élémentaire

Énoncé proposé :

1° Vérifier que

a) $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$,

b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$,

c) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$.

2° Compléter, de façon analogue :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}=\ldots,$$

le second membre étant une somme de fractions de numérateur 1 et dont les dénominateurs soient des entiers consécutifs (ne pas oublier de vérifier).

(*) IREM de Toulouse.

3º Proposer, de même, un second membre pour

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{79}-\frac{1}{80}+\frac{1}{81}-\frac{1}{82}=\ldots$$

où les points de suspension du premier membre suggèrent les fractions de numérateur 1, dont les dénominateurs vont de 7 à 78, en les ajoutant quand le dénominateur est impair, sinon en les soustrayant.
– Il n'est pas demandé, en ce 3º, de démontrer l'égalité proposée –

Commentaires

1º Bien entendu, le a) va servir pour le b) et celui-ci pour le c).

Ainsi, pour le c), le premier membre peut s'écrire $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$ et il suffit de remarquer que $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$.

2º *Méthode 1* :

De même qu'au 1º, le premier membre se transforme en $\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$, ce qui donne le second membre recherché.

Méthode 2 :
En observant les égalités du 1º, on peut conjecturer que le nombre de termes du second membre est la moitié de celui du premier membre, donc ici la moitié de 8 et que le dernier terme est $\frac{1}{8}$.

D'où la proposition : $\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$.
Reste à vérifier … (comme précédemment).

3º Ce qui précède permet de conjecturer, pour le second membre, 41 termes allant de $\frac{1}{42}$ à $\frac{1}{82}$.

Commentaire général.

α) On voit, dès le 1º et avec le 2º, poindre l'intérêt du $\frac{1}{a}=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2a}$, soit, encore, $-\frac{1}{2a}=\frac{1}{2a}-\frac{1}{a}$ …

β) On aurait pu avoir la tentation d'utiliser le $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$. Cela donne de jolis membres, ainsi, pour le 2°, $\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{7\times8}$, mais sans débouchés faciles, me semble-t-il, sur la forme souhaitée au second membre. Au contraire, si l'on demandait de conjecturer et de vérifier l'égalité

$$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{5\times6}+\frac{1}{7\times8}=\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8},$$

il serait intéressant de ramener à la forme de l'égalité du 2°.

γ) Voici la démonstration proposée par « Math-Jeunes » (n° 98J – mai 2001) – adaptée à un énoncé plus court –
Soit à démontrer l'égalité :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{79}-\frac{1}{80}+\frac{1}{81}-\frac{1}{82}=\frac{1}{42}+\frac{1}{43}+\frac{1}{44}+\ldots+\frac{1}{81}+\frac{1}{82}.$$

La méthode de résolution de nos amis décapite le premier membre à partir de $\frac{1}{42}$: les termes additifs s'annulent avec leurs égaux du second membre, les termes soustractifs (par leur addition aux deux membres, i.e. par « passage dans le second membre ») viennent doubler les termes correspondants du second membre.
L'égalité proposée est ainsi équivalente à :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{41}=\frac{2}{42}+\frac{2}{44}+\ldots+\frac{2}{82},$$

c'est-à-dire à :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{41}=\frac{1}{21}+\frac{1}{22}+\ldots+\frac{1}{41}.$$

Il reste à réitérer le processus jusqu'à l'égalité finale équivalente : $1=\frac{2}{2}$!

II. Une recherche à construire (sans proposer le I)

Énoncé possible :

Le premier membre étant composé comme l'indique le 3° du I ci-dessus, on demande de conjecturer un second membre constitué par une somme de fractions de numérateur 1 et dont les dénominateurs soient des entiers consécutifs.

Commentaire :

Par paresse j'ai arrêté le premier membre à $-\frac{1}{82}$ (et non à $-\frac{1}{466}$ comme nos amis belges).
L'essentiel est que k soit un entier naturel suffisamment grand pour obliger à réfléchir.
Dès lors, il semble raisonnable d'espérer (il y faut une formation générale des élèves en toute occasion) que *les élèves se poseront d'abord des problèmes analogues* avec moins de termes.

Autrement dit, les élèves doivent être *capables d'inventer eux-mêmes les étapes du I*. D'où la conjecture.

III. Démonstration de l'architecture en jeu (du « pattern »)

On peut conjecturer l'égalité (E) suivante :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Démontrons… :

1. Généralisation de la méthode proposée par Math-Jeunes

Cf. ci-dessus § γ) du I.

2. Méthode par récurrence

Si la formule est vraie pour $1-\frac{1}{2}+\ldots-\frac{1}{2p}=\frac{1}{p+1}+\ldots+\frac{1}{2p}$, qu'en advient-il en remplaçant p par $p+1$?

Nous avons

$$1-\frac{1}{2}+\ldots-\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{2p+2}$$

$$=\frac{1}{p+1}+\ldots+\frac{1}{2p}+\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{2p+2}$$

$$=\frac{1}{p+2}+\ldots+\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+2},$$

en remplaçant $\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2p+2}$, soit $\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2(p+1)}$, par $-\frac{1}{2(p+1)}$.

La formule est donc encore vraie. Or elle l'est pour $p = 1$, donc …

3. Méthode en décomposant les fractions à soustraire, mais toujours avec des 1 aux numérateurs

On utilise l'égalité : $-\frac{1}{2p}=\frac{1}{2p}-\frac{1}{p}$.

Alors le premier membre de l'égalité (E) s'écrit :

$$1+\left(\frac{1}{2}-1\right)+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}\right),$$

soit, en groupant additions et soustractions :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\ldots\frac{1}{n}.$$

Or, avec $p \leq n$, tout $\frac{1}{p}$ figure deux fois, d'une part en addition, d'autre part en soustraction. En effet, ces $-\frac{1}{p}$ proviennent, de 1 à n, de la décomposition des $-\frac{1}{2n}$. Il y ainsi élimination de tous les $\frac{1}{p}$, p variant de 1 à n. Il reste :

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

4. Méthode par des regroupements en « cascades » géométriques

Intéressons-nous aux suites de fractions passant de l'une à l'autre par division par 2 (suites géométriques…).

En effet, $\frac{1}{p}-\frac{1}{2p}=\frac{1}{2p}$, puis $\frac{1}{2p}-\frac{1}{4p}=\frac{1}{4p}$, etc.

• De telle sorte que, par exemple :

– la cascade $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{16}-\ldots-\frac{1}{2^{\alpha}}$ se réduit à $\frac{1}{2^{\alpha}}$,

– la cascade $\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}-\frac{1}{24}-\ldots-\frac{1}{3\times 2^{\beta}}$ se réduit à $\frac{1}{3\times 2^{\beta}}$,

– la cascade $\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{20}-\frac{1}{40}-\ldots-\frac{1}{5\times 2^{\gamma}}$ se réduit à $\frac{1}{5\times 2^{\gamma}}$.

• Remarquons que la cascade se réduit à son premier terme $\frac{1}{p}$ lorsque, la clôture étant $-\frac{1}{2n}$, $p>n$ (et p impair).

• Nous pouvons donc ordonner le premier membre de (E) de façon à faire apparaître les cascades et à utiliser leurs résultats.

Cette méthode ne me semblant d'exposé aisé que pour des valeurs numériques de n, j'y procéderai pour, par exemple, $n = 21$.

Il s'agit alors de prouver (égalité E′) que :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{41}-\frac{1}{42}=\frac{1}{22}+\frac{1}{23}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{41}+\frac{1}{42}.$$

Organisons le premier membre grâce aux « cascades ». Nous obtenons :

$$\underbrace{\frac{1}{32}+\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\ldots+\frac{1}{19}+\frac{1}{21}\right)}_{A}+\underbrace{\frac{1}{23}+\frac{1}{25}+\ldots+\frac{1}{41}}_{B}.$$

La partie A est, en développant, constituée de 11 termes, distincts, le plus grand étant $\frac{1}{22}$ et le plus petit $\frac{1}{42}$, avec des dénominateurs pairs.`

Or la partie qui manque à B pour obtenir le second membre de (E′) a exactement les mêmes caractères. Elle est donc identique à A. D'où l'égalité (E′) (il y a, bien entendu, d'autres façons d'identifier A à la « partie manquante » de B, par double inclusion par exemple).

5. Méthode par comparaison d'accroissements

Reprenons l'égalité (E) à établir.
Soit u_n son premier membre et v_n le second. Quand n augmente de 1 :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2},$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}\quad\text{(chute du premier terme)}$$

$$=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}.$$

Donc $u_{n+1}-u_n=v_{n+1}-v_n$, soit encore : $u_{n+1}-v_{n+1}=u_n-v_n$.

Il s'ensuit que u_n-v_n est constante quel que soit n. Or, pour $n=1$, $u_1=1-\frac{1}{2}$ et $v_1=\frac{1}{2}$. Donc $u_n=v_n$.

IV. Un soubassement de l'architecture

Ce paragraphe est une contribution de J.-P. Friedelmeyer.

Comme souvent pour une égalité mathématique non évidente, on peut s'interroger sur son origine et sur la manière par laquelle elle a été découverte. Nous ne les connaissons pas en ce qui concerne l'exercice évoqué ci-dessus et proposé aux élèves belges. Mais il y a en tout cas un précédent historique qui les fournit : la quadrature de l'hyperbole, de deux manières différentes. Il s'agit d'approcher l'aire sous l'hyperbole $y=\frac{1}{1+x}$, limitée par son asymptote, par exemple entre les abscisses 0 et 1, soit $\int_0^1\frac{dx}{1+x}=\ln 2$.

• Une manière classique consiste à calculer la somme de Riemann de la fonction $x\mapsto\frac{1}{1+x}=f(x)$ avec le pas constant $\frac{1}{n}$, soit par la somme S_n :

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\ldots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$$

ou

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}.$$

C'est le second membre de l'égalité (E) ci-dessus.

• Une autre manière moins classique nous a été donnée en 1668 par un mathématicien « amateur »(1) William Viscount Brouncker (1620-1684) dont on connaît peut-être le développement en fraction continue :

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}}}$$

La méthode consiste à remplir l'aire cherchée au moyen de rectangles de bases 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{2^3}$, … et de hauteur la plus grande possible (voir figure).

Plus précisément :

① un rectangle de base 1 : ABCD d'aire $\frac{1}{2} = \frac{1}{1\times 2} = 1 - \frac{1}{2}$;

② un rectangle de base $\frac{1}{2}$: DEFG d'aire $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12} = \frac{1}{3\times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$;

③ deux rectangles de base $\frac{1}{8}$: GHIJ et EKLM d'aires $\frac{1}{4}\left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right)$ et $\frac{1}{4}\left(\frac{4}{7} - \frac{1}{2}\right)$, soit

$\frac{1}{5\times 6}$ et $\frac{1}{7\times 8}$ ou $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ et $\frac{1}{7} - \frac{1}{8}$;

④ quatre rectangles de base $\frac{1}{8}$: JNPQ, HRST, MUVW, KXYZ d'aires

$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{8}} - \frac{1}{1+\frac{2}{8}}\right)$, $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+\frac{3}{8}} - \frac{1}{1+\frac{4}{8}}\right)$, $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+\frac{5}{8}} - \frac{1}{1+\frac{6}{8}}\right)$, $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{1+\frac{7}{8}} - \frac{1}{1+\frac{8}{8}}\right)$ ou

$\frac{1}{9\times 10}$, $\frac{1}{11\times 12}$, $\frac{1}{13\times 14}$, $\frac{1}{15\times 16}$ ou $\frac{1}{9} - \frac{1}{10}$, $\frac{1}{11} - \frac{1}{12}$, $\frac{1}{13} - \frac{1}{14}$, $\frac{1}{15} - \frac{1}{16}$;

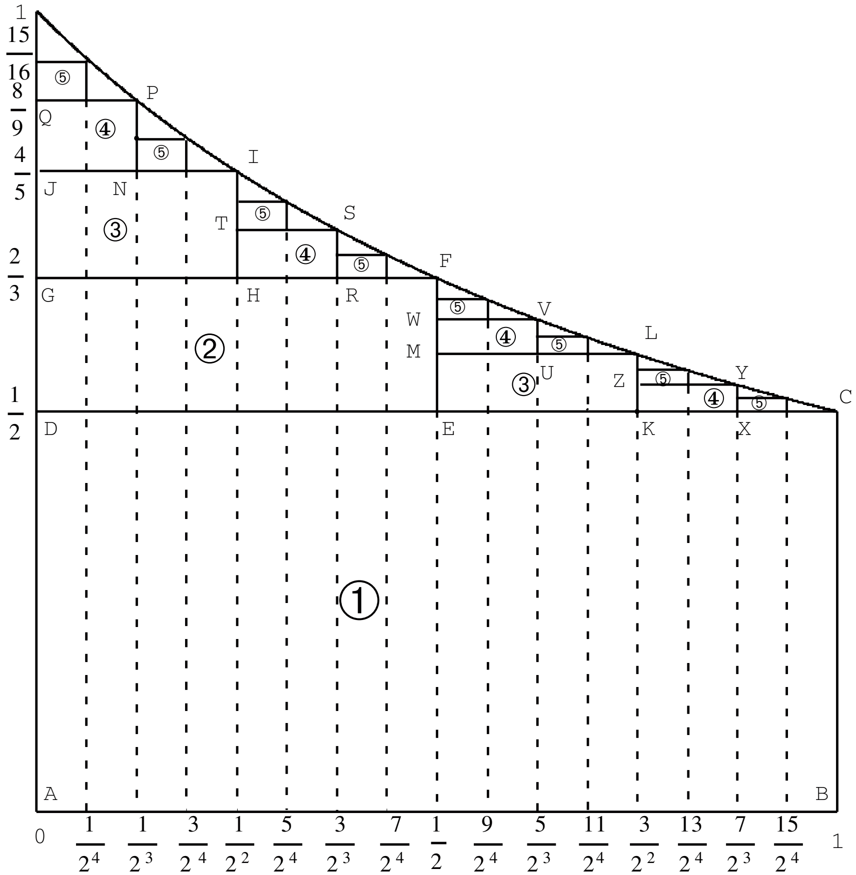
…

n) 2^{n-2} rectangles de base $\frac{1}{2^{n-1}}$ et d'aires $\frac{1}{2^{n-1}}\left[f\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) - f\left(\frac{k+1}{2^{n-1}}\right)\right]$ pour k impair, $1 \le k \le 2 \times 2^{n-1} - 1$, soit pour $k = 2p - 1$, $1 \le p \le 2^{n-1}$

(1) selon le livre de J.L. Coolidge, « The mathematics of Great Amateurs », 1990, Oxford Science Publications.

$$\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1}{1+\dfrac{2p-1}{2^{n-1}}}-\frac{1}{1+\dfrac{2p}{2^{n-1}}}\right)$$

en nombre 2^{n-1}.



Au total, au rang n) et un partage de [0,1] par les points d'abscisses $\dfrac{k}{2^{n-1}}$ $(0 \le k \le 2^{n-1})$, on a la somme du premier membre de (E) dans le cas particulier où l'on prend 2^{n-1} à la place de n. Mais il est clair que la somme de tous ces rectangles coïncide avec la somme des rectangles correspondant à la somme de Riemann de la première manière, lorsque l'on prend 2^{n-1} intervalles égaux au lieu de n. L'égalité (E) est donc démontrée pour le cas des n qui sont puissances de 2. Il est remarquable qu'elle le soit aussi pour des entiers quadratiques, ce qui n'apparaît pas par la méthode de Brouncker. Quelqu'un en trouvera-t-il l'explication ?

• Ajoutons que Nicolas Kauffman dit Mercator(2) (1619-1687) avait trouvé le développement en série entière de ln(1 + x) la même année (1668) et ce bien avant la connaissance de la formule de Taylor qui date de 1715. Voici comment.

L'intervalle [0,x] étant partagé en n intervalles égaux de longueur $h = \frac{x}{n}$, l'aire A sous l'hyperbole est approchée par la somme des rectangles de base h et de hauteurs respectives 1, $\frac{1}{1+h}$, $\frac{1}{1+2h}$, $\frac{1}{1+3h}$, …, $\frac{1}{1+(n-1)h}$.

Soit $\mathrm{A} \approx h + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{h}{1+jh}$; mais $\frac{1}{1+jh} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k (jh)^k$; d'où en regroupant les termes de même puissance de h :

$$\begin{aligned}\mathrm{A} \approx nh &- h\left[h + 2h + 3h + \ldots + (n-1)h\right]\\ &+ h\left[h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \ldots + [(n-1)h]^2\right]\\ &- h\left[h^3 + (2h)^3 + (3h)^3 + \ldots + [(n-1)h]^3\right]\\ &\ldots\\ &+ (-1)^k h\left[h^k + (2h)^k + (3h)^k + \ldots + [(n-1)h]^k\right] + \ldots\end{aligned}$$

$$\mathrm{A} = x - \frac{x^2}{n^2}\left[\sum_{i=1}^{n-1} i\right] + \frac{x^3}{n^3}\left[\sum_{i=1}^{n-1} i^2\right] - \frac{x^4}{n^4}\left[\sum_{i=1}^{n-1} i^3\right] + \ldots$$

Or quelques années auparavant, en 1656, Wallis avait démontré que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

D'où le résultat :

$$\mathrm{A} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots.$$

V. Quelques prolongements

Les a) et b) ci-dessous sont de lilliputiens prolongements calculatoires. Le c) se réfère à une théorie sans s'y aventurer.

a) Transformations des égalités par homothétie

On multiplie les divers termes des sommes par k (entier ou pas). Par exemple :

(2) Ne pas confondre avec le Mercator de la carte qui porte son nom, de son vrai nom Gerhard Kremer (1512-1594).

$$3-\frac{3}{2}+1-\frac{3}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}$$

(cf. égalité c) du I, en multipliant les termes par 3).

b) Transformation des égalités par « translation »

Ainsi $\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}$ (somme A) est la différence entre $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}$ (somme B) et $1-\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$ (somme C).

Or $B=\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{12}$ et $C=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$.

D'où $A=\frac{1}{12}+\frac{1}{11}+\ldots+\frac{1}{8}+\frac{1}{7}-\frac{1}{6}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}$.

c) « Harmonie » et « Semi-harmonie »

L'étude de limites de suites, dès la T.S., peut inclure des exercices classiques concernant :

– la suite « harmonique » de terme général : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}$,

– la suite « semi-harmonique » de terme général : $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}$.

On établit alors que la première diverge alors que la seconde converge vers ln 2 (qu'on peut faire conjecturer aisément avec des calculatrices programmables).
Cette convergence peut être établie de diverses façons. L'une d'elles utilise la « demi-suite harmonique » $\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}$ que nous avons démontrée égale à la semi-harmonique.
On se réfèrera, par exemple, à la très jolie et brève démonstration donnée par Daniel Reisz dans [D.R.].

De quoi réfléchir, aussi, à l'importance du mot « fini » dans la propriété : « On ne change pas *la nature* d'une suite en omettant un nombre *fini* de termes ». [Pour l'éjection de la « première moitié » de la suite harmonique, le nombre de termes est infini et on passe d'une suite divergente à une suite convergente…].

d) Et avec d'autres « amputations infinies » de la suite harmonique ?

Je renvoie pour les études correspondantes à [D.R.] ou à un article de [A.B.] qui déclare s'en être inspiré.

En voici des résultats :
On obtient encore une suite divergente en supprimant :
– un terme sur deux ([D.R]. et [A.B.]),
– les termes à dénominateurs non premiers ([D.R]. et [A.B.]).

On obtient des suites convergentes :
– en supprimant tous les termes dont les dénominateurs contiennent au moins une fois le chiffre 9 ([D.R]. et [A.B.]),
– en supprimant tous les termes dont les dénominateurs contiennent au moins une fois le chiffre 0,
– en ne conservant que les termes dont les dénominateurs sont des nombres triangulaires ou ceux dont les dénominateurs sont des carrés [A.B.].`

Des ouvrages de Spéciales ou Universitaires traitent sans doute d'autres exemples…

Concluons, avec Daniel Reisz :
« Le problème n'est pas dans la quantité des termes supprimés, mais dans leur qualité ! »

J'espère vous avoir, par ces exemples, invité à lire les deux articles [D.R.] et [A.B.]. Vous ne le regretterez pas compte tenu de l'intérêt des méthodes de démonstration (transposables au lycée) utilisées.

En collège ou Seconde, on peut au moins aller vers des conjectures
Des collègues ont suggéré l'usage de tableurs.

Bibliographie

Math-jeunes : Revue de la Société Belge des Professeurs de Mathématiques d'expression française. Numéros d'avril et de mai 2001 (cf. présent Bulletin, p. 721).

[A.B] *Didactique des mathématiques. Le dire et le faire*, ouvrage collectif dirigé par Alain Bouvier.

[D.R.] Daniel Reisz. « *Thème et variations sur la série harmonique* », Bulletin de l'APMEP n° 320, 320, pages 553-562.

Yves Chevallard. *Théorie des séries. Tome 1 : Suites numériques*. Cédic 1979.