Au delà du compas : la géométrie des courbes

Henri Bareil(*)

Tel était le titre d'une exposition, due à l'École Normale Supérieure de Pise (créateurs : F. Conti et E. Guisti), présentée au Palais de la Découverte – Paris – du 25 février 2000 au 31 janvier 2001.

Sa publicité précisait :
« Au-delà de l'aspect géométrique et mathématique, certaines courbes ont aussi des applications pratiques ou scientifiques : pensons aux profils des engrenages ou aux orbites des planètes.
C'est un triple regard, historique, conceptuel et pratique, que cette exposition très interactive propose aux visiteurs à l'aide de maquettes, de mécanismes et d'objets techniques.
La plupart d'entre eux permettent d'expérimenter soi-même… ».

Accompagnée d'une brochure de 92 pages (brochure [2] dans la Bibliographie)**, l'exposition présentait quelque seize thèmes. Chacun avait donné lieu à deux ou trois pages de Commentaires, tirées à part. Au total trente six pages. Elles permettaient de préciser d'abord le vocabulaire** (notions d'enveloppe, de développée, de développante, de courbure, …), puis s'intéressaient aux diverses situations-problèmes de l'exposition : « Les miroirs ardents », « Réflexion et échos », …

Les auteurs de l'exposition les ont émaillées de quelques rappels ou anecdotes historiques qui, parfois, mettent à mal des légendes, ainsi pour les miroirs d'Archimède (il est hors de question qu'ils aient pu incendier le moindre vaisseau…). Surtout, ils ont **multiplié les dessins explicatifs et avancé quelques démonstrations**.

L'œuvre exposée me semble assez exemplaire pour que **j'en souligne quelques points saillants** (en négligeant le côté histoire des mathématiques et des exposés très classiques comme la géométrie du seul compas ou actuellement très répandus comme les fractales, en évitant aussi de trop recouper d'autres articles de ce même Bulletin). Il y aura quelques ajouts personnels.

Mais voyons donc ce qui me frappe le plus en revisitant ensemble cette exposition à l'aide des pages de Commentaires.

(*) IREM de Toulouse.

I. LA VIE DES COURBES vues à travers l'exposition et ses commentaires

I.1. *LEUR ÉMERGENCE*

a) Dans la nature

Nous y en reconnaissons beaucoup. En petit florilège diversifié :

– *coniques* en astronomie,
– *hélices* de l'ADN,
– *spirales logarithmiques*, lévogyres ou dextrogyres en pilotage Fibonnaci, dans les fleurs de tournesol, les coquillages, …
– … les *néphroïdes* : *épicycloïdes à deux rebroussements*, mais aussi *caustiques par réflexion*, c'est-à-dire enveloppes de rayons lumineux réfléchis. Ne sont-elles pas, parfaitement hypocaloriques, dans les bols de nos petits-déjeuners ?

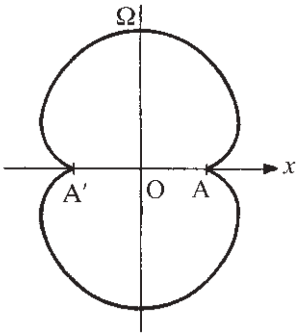

Figure1

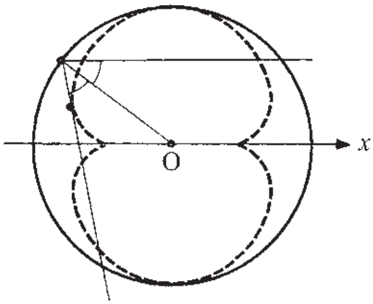

Figure2

b) Dans leur communauté

Les courbes mathématiques surgissent, souvent de façon inattendue, comme lieux géométriques, enveloppes, transformées par divers moyens. C'est très classique pour les configurations usuelles, coniques y compris.

Par exemple :

1) Lorsque M décrit le cercle, l'enveloppe de la médiatrice de [MA] est une ellipse, celle de la médiatrice de [MB] une hyperbole.

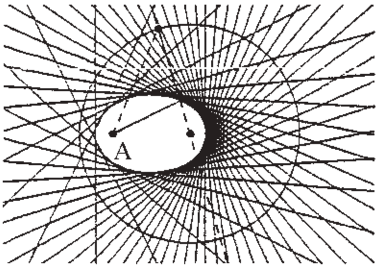

Figure 3

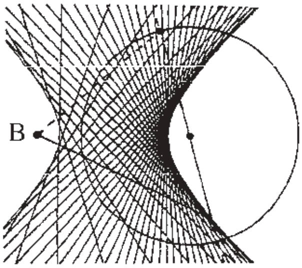

Figure 4

2) Avec deux tiges de Meccano et des fils de laine, joignons (figure 5) les points homologues de deux divisions semblables (prises « tête-bêche » pour que ce soit plus spectaculaire) sans points homologues communs. On voit bien se dessiner une enveloppe qui semble être une parabole (elle l'est !)…

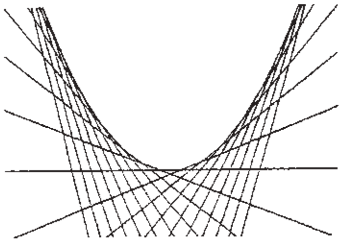

Figure 5

En moins classique, n'est-il pas spectaculaire de retrouver, par exemple :

- *la lemniscate de Bernoulli* (figure 7) comme enveloppe d'une famille de cercles centrés sur une hyperbole équilatère et passant par son centre (figure 6) ?

- la *cardioïde* (*épicycloïde à un rebroussement*, cas particulier du *limaçon de Pascal* (figures 9 et 10), lequel est une *conchoïde de cercle*) (cf. Brochure APMEP n° 202) qui apparaît comme l'enveloppe des cercles centrés sur un cercle fixé et passant par un point fixé (figure 8)…

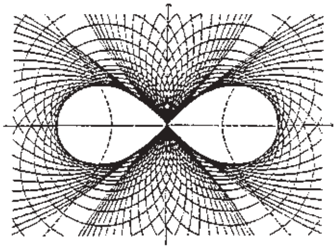

Figure 6

Lemniscate de Bernoulli

Cette courbe qui est un ovale de CASSINI particulier est le lieu des points M tels que, MF. MF′ = OF^2.
Elle admet un grand nombre de propriétés et de définitions géométriques et, en particulier, un point double à l'origine.
C'est Jacques BERNOULLI (1654-1705) qui étudia le premier cette courbe.

Figure 7 (extrait de la Brochure n° 202)

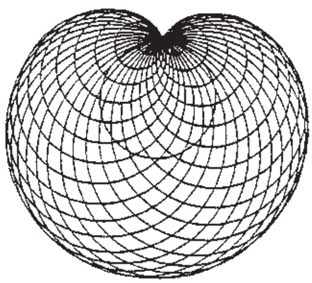

Figure 8

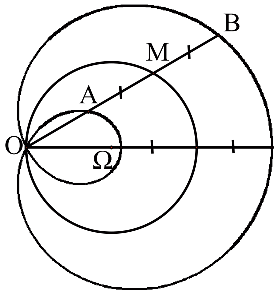

Figure 9. M décrit le cercle (Ω). Sur toute droite (OM), A et B sont tels que MA = MB = *d* (constante). Le lieu de A et B est un limaçon de Pascal

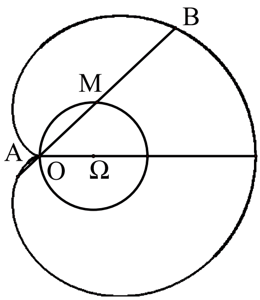

Figure 10. Cardioïde comme Limaçon de Pascal particulier : *d* est un diamètre du cercle (Ω).

Voici, d'ailleurs, les *coniques* à travers un phénomène physique : « *Lorsqu'on éclaire une paroi avec une torche électrique, la forme de la surface éclairée varie avec l'inclinaison de la torche. Si celle-ci est perpendiculaire à la paroi, on obtient un disque. Quand on commence à incliner la torche, le disque se transforme en une ellipse toujours plus allongée* » jusqu'à se muer en parabole puis en hyperbole : on reconnaît là les sections d'un cône (de lumière) par un plan.

I.2. *UNE BRILLANTE VIE MONDAINE*

Que de travestissements éventuels, « masques et bergamasques » chers à Verlaine, proposés, et parfois refusés … par :
– **les transformations géométriques qui n'hésitent pas à … transformer vraiment** : inversion, affinités, transformations par polaires réciproques, … (cf. [7]).
– les « **développées** » (enveloppes des normales aux courbes) cf. figure 11.
– les « **développantes** » : Considérons un point O d'une courbe Γ. « Fixons une cordelette en A, tendons-la le long de Γ, la partie libre étant tangente à Γ au point où elle s'en détache. En augmentant progressivement la partie de la cordelette en contact initial avec Γ, l'extrémité libre décrit une développante de Γ – fonction du choix du point initial –… Et Γ est une développée de chacune de ses développantes ».

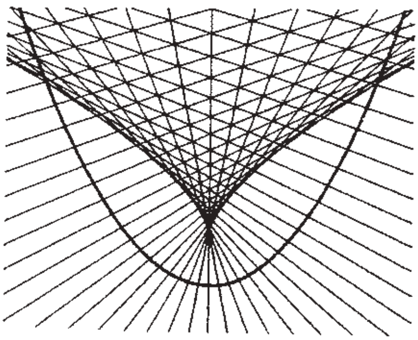

Figure 11.
La développée de la parabole

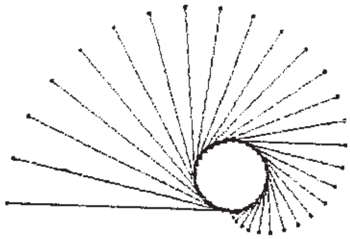

Figure 12. Développante de cercle

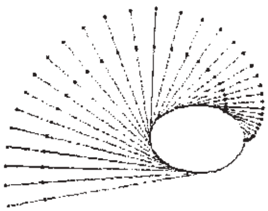

Figure 12. Développante d'ellipse

– les « **podaires** » d'une courbe Γ par rapport à un point P : ensemble des projetés orthogonaux de P sur les tangentes à Γ (la podaire d'un cercle par rapport à un de ses points est une cardioïde).

– **Voici maintenant une mondaine de choc** : ***la spirale logarithmique*** !
◦ courbe « équiangle » : elle coupe ses rayons-vecteurs sous un angle constant,
◦ à partir de deux de ses points, on en trouve une infinité

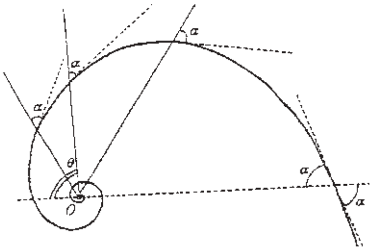

Figure 14

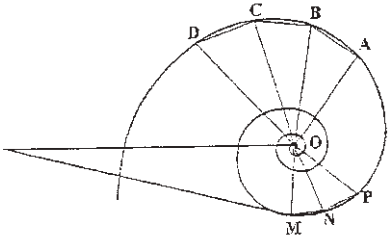

Figure 15

Elle court les festivités … avec quelle « auto-fidélité » !

◦ n'importe quelle inversion centrée au pôle de la spirale, la podaire par rapport au pôle, la développée et les développantes, les caustiques par réflexion et réfraction, sont … des spirales identiques !

J. Bernoulli, sidéré par ce symbolisme de Résurrection, voulût cette courbe gravée sur sa tombe « *Changée, je ressuscite identique* » (mais par erreur on grava une spirale … d'Archimède !).

I.3. *UN PEU MYSTIFICATRICES ? , UN PEU MAGICIENNES ?*

• Qu'obtient-on en suspendant une corde pesante de rigidité nulle, de longueur l, entre deux points A et B, avec l supérieur à AB ? … Un arc de parabole semble-t-il ? Eh bien, non! c'est une « **chaînette** » (on retrouve la chaînette en architecture, dans les Arches de Gaudi, par exemple). (cf. Brochure APMEP nº 202, p. 78).
Savons-nous donc, maintenant, aussi, que les câbles des ponts suspendus sont des chaînettes ?
Eh bien, non ! : ils ne sont pas livrés à leur seul propre poids ! Ils inclineraient plutôt vers l'arc de parabole (cf. § II).
Méfiance !
La figure 16 représente une *chaînette* (qui ressemble à une parabole) et sa développante appelée « *tractrice* ». Celle-ci, par rotation autour de (Ox), engendre une « pseudo-sphère », (cf. figure 17), appellation méritée par de nombreuses propriétés rappelant celles de la sphère (même aire et volume qu'une sphère de rayon OI, …), et par son rôle dans le modèle de Beltrami de géométrie hyperbolique.
La chaînette apparaît parfois dans la forme des voiles de bateaux sous le vent.

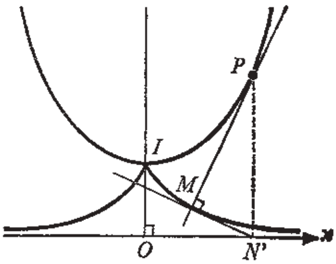

Figure 16. Chaînette et tractrice

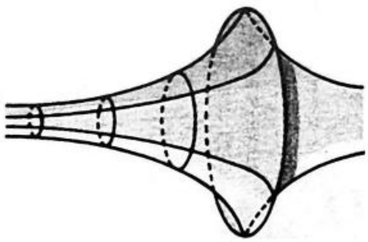

Figure 17. Pseudo-sphère

• Certaines salles de châteaux, ..., de l'abbaye de La Chaise Dieu – pour confesser les lépreux – ont une curieuse propriété, de même certaines stations de métro à section elliptique : des chuchotements à tel endroit sont clairement perçus en tel autre et pas ailleurs… Il s'agit d'une *propriété de l'ellipsoïde héritée de l'ellipse* : les ondes émises d'un foyer se réfléchissent sur la face interne en convergeant en l'autre foyer… De foyer en foyer, l'audition est spectaculaire !

• Imaginons, disent les commentaires de l'exposition, « *un terrain où l'on se déplace de plus en plus difficilement au fur et à mesure que l'on s'approche d'une ligne horizon …* » Il n'est alors pas souvent efficace de se déplacer en ligne droite. Piochez cela et vous avez le *demi-plan non-euclidien de Poincaré* (cf. Brochure APMEP no 137 de Roger Cuppens).

I.4. *LES HÉROÏNES DU TRAVAIL*

• Les droites et cercles (engrenages, …), bien sûr.

• Mais aussi les « **cycloïdes** » (cf. article de la Régionale d'Aquitaine) :

◦ « normales », « tronquées » ou « allongées » (cf. brochure APMEP nº 202), elles accompagnent les roues de nos véhicules…

◦ et les voici spécialistes dans la mesure du temps :

Il s'agit du **Pendule de Huygens** : « **Isochrone** », il donne la même durée à chaque oscillation, quelle que soit l'amplitude. Pour cela il faut et il suffit que le « poids » du pendule décrive une partie d'arche de cycloïde « retournée » : cf. figure 18.

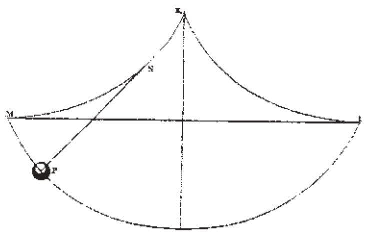

Figure 18

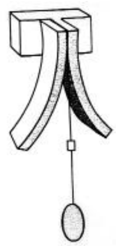

Figure 19

La cycloïde est « **Tautochrone** » (étymologiquement : « le même temps ») (cf. figure 20) : laissez tomber deux billes, l'une de M, l'autre de N : toutes les deux arrivent en même temps au point le plus bas de l'arc de cycloïde. De là le fait que la durée d'oscillation du pendule est indépendante de l'amplitude.

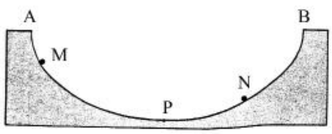

Figure20

Cette propriété de « tautochronie » est admirablement visualisable sur une grande maquette de l'exposition (cf. aussi, page 143 de [3] pour une maquette en carton avec fenêtre au point le plus bas de la cycloïde).

Pour obliger le « poids » du pendule à suivre un arc de cycloïde, il faut et il suffit (cf. figure 19) que les « guides » (profils) latéraux soient eux-mêmes… des arcs de cycloïdes (leur développante est alors une cycloïde).

• Un cercle qui roule sur une droite Δ reste aussi tangent à une parallèle Δ′ à Δ, engendrant une « bande » de largeur constante.
D'autres figures ont aussi cette propriété : **leur prototype est le Triangle de Reuleaux**.

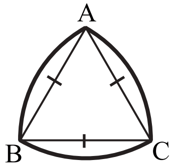

Figure21

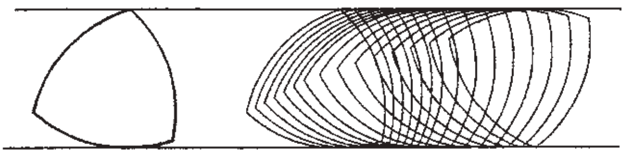

Figure22

Faites-le rouler… Observez (et démontrez, aisément).
Or, où court-il ?
… Il devient la **section du piston du moteur de Wankel**, dit aussi « **moteur rotatif** » ! Sa forme et sa propriété de « largeur constante » s'unissent pour permettre, par période, toutes les phases du moteur…
Le principe de ce moteur, donc du triangle de Reuleaux, a été repris pour un cœur artificiel (Équipe marseillaise du Professeur Montiès).

• **La spirale d'Archimède… Fée de la machine à coudre** !
Pour obtenir un enroulement uniforme du fil sur une bobine, Singer, génial fabricant de machines à coudre, inventa une came « *formée de deux morceaux de spirale d'Archimède* ».

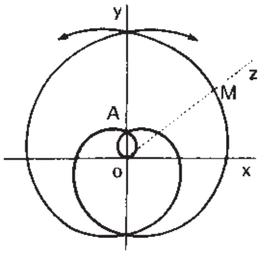

Figure 23.
La spirale d'Archimède est le lieu d'un point M qui parcourt un rayon vecteur Oz avec une vitesse constante, ce rayon vecteur tournant lui-même avec une vitesse angulaire constante.

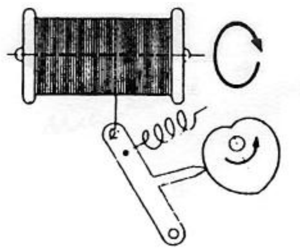

Figure24
Le fil s'enroule uniformémernt sur la bobine

• **Le mécanisme de Watt**(1) intervient notamment dans des suspensions (de wagons, de camions, …).
• **L'inverseur de Peaucellier**(2), qui sait transformer un cercle en droite, et vice-versa, (cf. la transformation appelée Inversion) trouve une application intéressante dans les « **agrandissements photographiques autofocalisants** » (il y a une jolie démonstration dans [2]).

(1) NDLR : cf. p. 634.
(2) NDLR : cf. p. 635.

• **Les parallélogrammes et divers quadrilatères articulés**, parfois en enchaînement, sont partout : des essuie-glaces de bus aux amortisseurs et dans la direction des voitures, (cf. dessin page 56 de [2]), des boîtes à ouvrages aux élévateurs…

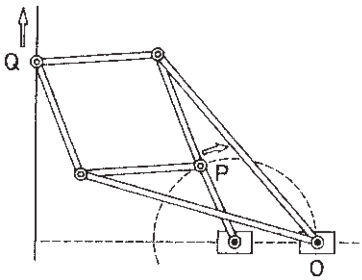

Figure 25.
Mécanisme de Peaucellier

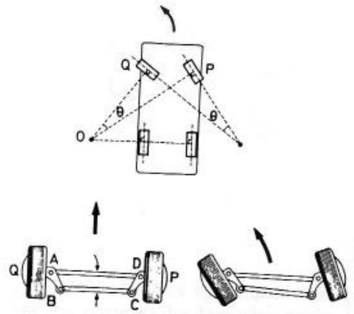

Figure 26. Direction d'une voiture utilisant un quadrilatère articulé

• Les Commentaires consacrent quatre pages, dessins inclus, aux vertus quotidiennes des **Quadrilatères de Grashof** : la somme des longueurs des deux côtés minimal et maximal est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.

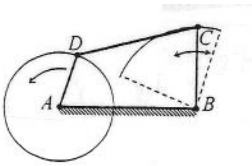

Figure 27

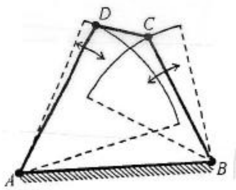

Figure 28

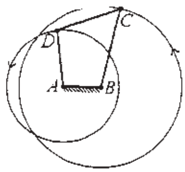

Figure 29

Réalisez un modèle avec des tiges de Meccano ou de carton. Fixez AB, puis essayez de faire tourner [AD]. Qu'observez-vous pour [AD] et [BC] ? Soit des rotations, soit des oscillations, selon que le côté le plus court est AD (Figure 27) ou CD (Figure 28) ou AB (Figure 29)…
De là neuf objets cités par nos auteurs, dont le mouvement relève d'un tel mécanisme !

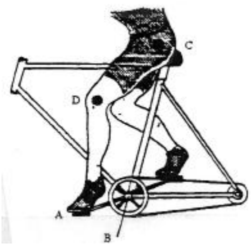

Figure 30
Cycliste

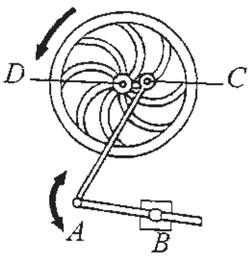

Figure 31
Pédale de machine à coudre

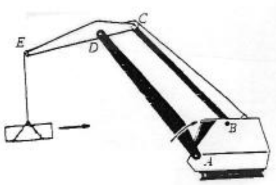

Figure 32
Grue

… et voiture à pédales, draisienne, pince, groom de porte, concasseur, mécanisme d'avancement d'une pellicule.

II. « LES MATHS LÀ-DEDANS ? »

– Se familiariser avec nombre de courbes mathématiques, guetter leur émergence, les conjecturer, percevoir des propriétés, … les exploiter, ….. ce sont bien « des mathématiques » !

– Y unir « la tête et les mains », les yeux bien sûr, avec le sentiment de la beauté, …, voilà de quoi s'approprier au mieux les mathématiques.

– Le faire au cours d'une exposition, de sa préparation, de sa visite, de son exploitation en classe, voilà qui permet des échanges collectifs ouvrant sur le débat scientifique … en pouvant y prendre plaisir !

– Ce qui conduit tout naturellement à l'émergence du souci de « démontrer » ! Bien entendu, il s'agira de démonstrations à tenter en exploitation de la visite, et non pas pendant celle-ci. Ce qui pourra se faire de façon interactive entre l'enseignant et les élèves intéressés, par des conseils éventuels successifs. **Un club ou atelier de maths** en serait le lieu idéal, avec le vœu que le vécu de l'exposition puisse être réanimé sur ordinateur.

– Les interventions de triangles équilatéraux, parallélogrammes, … permettent des démonstrations simples justifiant les mouvements ou transformations observés sur des objets. On ne s'en privera pas !

Mais je prendrai ici des exemples moins immédiats « *d'îlots déductifs* » :

Le côté énigmatique de la plupart des situations-problèmes proposées, le doute quant aux conjectures joint au désir de les justifier incitent, répétons-le, à démontrer.

Mais à partir de quoi ?

Face aux situations-problèmes aussi diversifiées de notre exposition, et souvent hétéroclites, il ne saurait être question d'insérer leurs justifications éventuelles dans des cours dûment construits et … hors programmes. Il sera donc non seulement utile mais obligatoire, de raisonner par « îlots déductifs » à partir de propriétés supposées connues ou assez « évidentes » pour qu'on les accepte et qu'on s'y appuie.

Exemple 1 : Les ponts suspendus

Les auteurs de notre exposition précisent d'abord les conditions matérielles (tirants verticaux en nombre pair et équidistants, …), puis ils s'intéressent aux points P d'insertion dans un câble porteur pour établir analytiquement que ceux-ci appartiennent à une parabole.
Leur démonstration s'établit à partir d'une consigne-clé : En chaque point P, il y a un équilibre statique entre les forces dirigées vers les deux P voisins et la fraction de poids du tablier supportée…

Exemple 2 : La cycloïde est « brachystochrone » (étymologie : « le temps le plus court »)

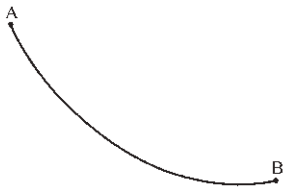

Figure 33

Figure 34

(i.e. : Pour aller d'un point A à un point B plus bas, elle propose le trajet le plus rapide : cf. les figures 33 et 34. C'est tout à fait surprenant, surtout dans le cas du second dessin, où il faut remonter !).
Miguel de Guzman rappelle en [3] une démonstration de Jean Bernoulli, à mon sens fort jolie, fondée sur l'analogie avec la lumière qui :
– voyage d'un point à un autre dans le temps minimal,
– a une vitesse fonction du milieu de propagation.
Cela est appliqué, pour aller de A à B « à un milieu optique formé par des couches horizontales et fines » telles qu'au rang j on ait, JJ′ étant la trajectoire et v_j la vitesse,

$$\sin\frac{\mu_j}{v_j} = k$$

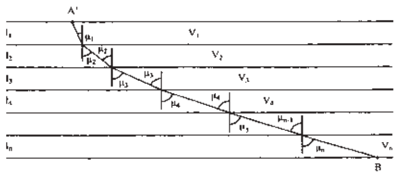

Figure 35

(cf. loi de la réfraction).
Autres pré-requis : un peu de trigonométrie et des connaissances élémentaires sur la dérivation.

Exemple 3 : le « cercle orthoptique » ou « cercle de Monge » d'une ellipse

On désigne ainsi le cercle **lieu des points**, du plan de l'ellipse, **d'où l'on voit celle-ci sous un angle droit** …. (i.e. : il y a deux tangentes perpendiculaires).
Une expérimentation simple, avec un matériel rudimentaire (ellipse tracée par la méthode du jardinier, équerre transparente, …) permet de conjecturer ce cercle-là.
Nos auteurs proposent deux démonstrations, l'une analytique et l'autre pas (ailleurs qu'en France elle est alors dite « de géométrie synthétique »…).
Leur démonstration analytique met en jeu des connaissances sur les équations à chaque pas explicitées.
Il n'en va pas de même pour la démonstration synthétique, qui, parlant de « tangente à l'ellipse », laisse ignorer le lot de propriétés apporté par cette expression. Or il est manifeste qu'il aurait fallu expliciter la propriété fondamentale plus loin implicitement utilisée par nos auteurs : « la tangente en M est la bissectrice extérieure de l'angle des rayons-vecteurs (i.e., de $\widehat{FMF'}$, F et F′ étant les foyers de l'ellipse » [Il y a aussi d'autres propriétés, implicites, sur la symétrie, qui seront utilisées.]

De plus, si l'on veut séduire, autant vaut proposer une démonstration aussi agréable que possible :

◦ *Voici les phases essentielles de la démonstration du Deltheil-Caire* (pages 214-215) qui se déroule avec, comme présupposés, les propriétés ci-dessus évoquées, et des propriétés métriques du triangle :

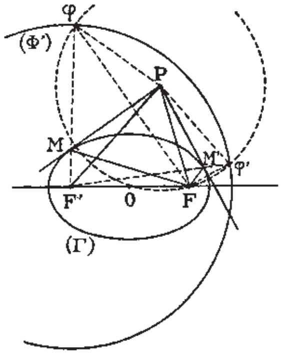

Figure 36

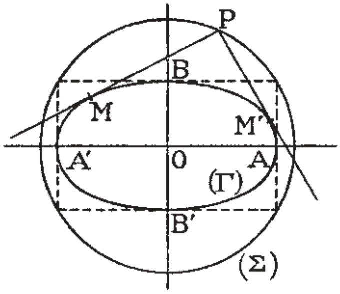

Figure 37

L'orthogonalité de (PM) et (PM′) équivaut à l'alignement de P, φ, φ' et

$$P\varphi = P\varphi' = PF,$$

donc à

$$PF^2 + PP'^2 = 4\,a^2,$$

soit

$$OP^2 = 2a^2 - c^2 = a^2 + b^2.$$

D'où…

◦ *Mais, avec d'autres propriétés de départ…, voici l'idée-clé de la démonstration de* [3] :

Supposons acquis la définition bifocale de l'ellipse et le fait que « les projetés orthogonaux des foyers sur les tangentes se trouvent sur le cercle de même centre que l'ellipse et de rayon *a* (demi-grand axe de l'ellipse) ».

$$OP^2 = a^2 - c^2\cos^2\alpha$$
$$OQ^2 = a^2 - c^2\sin^2\alpha$$

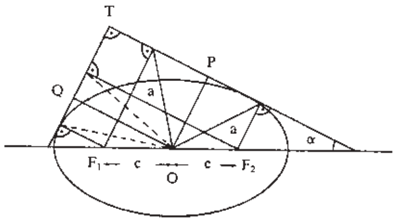

Figure 38

D'où

$$OT^2 = 2a^2 - c^2 = \dots$$

Exemple 4 : une ellipse (?) enveloppe

Dans le plan, il est proposé, expérimentalement, la situation suivante :

Soit un point fixe F et un angle droit $\widehat{xMF}$ tel que M décrive un cercle (O, R) avec R > OF. Quelle est l'enveloppe de la droite M*x* ?

L'expérimentation (ou la visualisation sur ordinateur) suggère que (M*x*) enveloppe une ellipse.

J'invite à une démonstration (que fournit le Deltheil-Caire) dont voici les présupposés essentiels (à expliciter) :

◦ Définition bifocale d'une ellipse
◦ Définition de la tangente comme position limite de sécante…
◦ Notion d'axe radical de deux cercles.

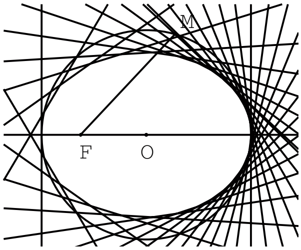

Figure 39

Exemple 5 : une étude due à La Hire (vers 1700)

Soit un angle $\widehat{xOy}$, fixe, d'un plan fixe P, et soit un segment AB, de longueur constante, d'un plan mobile P′, appliqué sur P de telle sorte que A se déplace sur (O*y*), B sur (O*x*), P′ glissant sans retournement. Considérons un point M fixe dans P′ (on le dit « invariablement attaché au segment AB »)**, donc mobile sur P. Quel est son lieu ?**
Des essais matériels (ou, maintenant, sur ordinateur) **suggèrent que M semble décrire une ellipse**.
Pour disposer de caractérisations simples de l'ellipse, il est conseillé de traiter d'abord un tel problème simplifié, avec $\widehat{xOy}$ droit et M sur (AB), ce qui débouche sur l'obtention d'une ellipse par la méthode dite de « la bande de papier » (laquelle matérialise, par un de ses bords, [AB] et M).

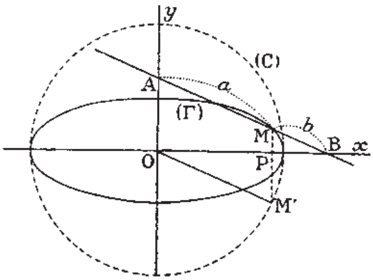

Figure40

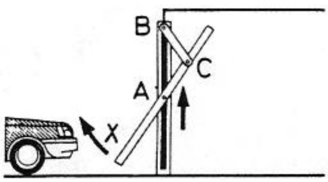

Figure41
Porte basculante d'un garage

Pour démontrer aisément, il suffit de connaître « Thalès-triangle » et l'équation cartésienne réduite d'une ellipse. Pour une exposition, il faut clairement les expliciter.
On peut aussi démontrer par affinité à partir d'un cercle (cf. figure 40), mais en explicitant alors le lien par affinité du cercle et de l'ellipse.
[Une concrétisation : la porte basculante d'un garage, cf. figure 41 : A et son symétrique par rapport à C glissent respectivement sur deux droites orthogonales… Dans ces conditions le point X décrit une ellipse.]

Un retour au problème initial est ensuite possible :

Partons d'une observation-clé : le cercle (mobile sur P) OAB a un rayon constant (démonstration par la « loi des sinus» : $\frac{a}{\sin A} = \ldots = 2R$).
Il suffit alors d'introduire son diamètre PQ passant par M et, de quoi a-t-on besoin ? Essentiellement :

– du théorème sur l'inscriptibilité d'un triangle rectangle,
– d'un théorème précisant que, dans des cercles égaux, des angles inscrits qui interceptent le même arc sont égaux (ce qui démontre que (O*u*) et (O*v*) sont fixes dans P).

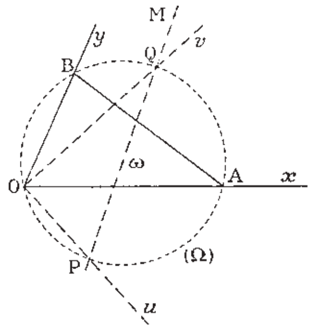

Figure 42

On trouvera une telle démonstration, complète, dans le Deltheil-Caire, page 258.

CONCLUONS POUR CES ÎLOTS DÉDUCTIFS :

Quand je demande que soient expressément précisées telles propriétés essentielles pour engendrer une démonstration, je n'oublie pas qu'il y a une foule d'autres propriétés indispensables mais qu'on n'explicite pas si elles sont « bien connues » ou, *a fortiori*, « évidentes »…, ce qui est parfaitement arbitraire !

Tout cela dépend des visiteurs de l'exposition … (dans une moindre mesure, il en va de même en classe).

Ce qui peut se résoudre en explicitant fortement les démonstrations. Avantage : beaucoup de visiteurs peuvent comprendre. Inconvénients : on ne sollicite guère initiative et créativité et le public cultivé (en maths) peut trouver fastidieuse une telle démonstration super-détaillée.

Cela pourrait se résoudre autrement, par exemple par les dialogues inter-actifs que j'ai préconisés, en exploitation de la visite, au début du II.

De tels îlots déductifs peuvent permettre, surtout en **clubs ou ateliers**, de proposer des recherches de démonstration dûment motivées par des expérimentations, quitte à ce que les propriétés en jeu soient hors programme.

III. AU TERME DE NOTRE VISITE

L'enseignement secondaire français (à plus forte raison le primaire !) ne connaît qu'une sous-population squelettique de courbes. Il n'y a pas, en cette pénurie, de quoi faire naître l'intérêt ni laisser percevoir l'alliance subtile et féconde de la géométrie des courbes et des techniques les plus évoluées.

Des expositions comme celles de la Régionale d'Aquitaine, comme celle-ci, pallient cette pauvreté.

Elles donnent ainsi accès à une « géométrie de la réalité » (cf. ouvrages d'Emma Castelnuovo) autrement séduisante.

Je souhaite avoir contribué à montrer les intérêts majeurs de telles expositions, leur faisabilité et un éventail d'exploitations.

Elles mobilisent la réalisation de dessins, maquettes, machines sommaires (éventuellement en carton), l'observation de machines plus sophistiquées, l'attention à des dessins qui les modélisent, des simulations sur ordinateur (cf. [2]).

Certes, on pourrait faire cela « à la maison » (dessins, maquettes), ou en salle d'informatique par exemple avec **CABRI II et les riches brochures de l'APMEP de Roger CUPPENS**. Cela peut fournir beaucoup d'opportunités.

Mais les activités vécues lors d'expositions ont un **côté convivial appréciable**, comme l'est leur **effet « choc »** par leur concentration d'objets et d'expériences.

Des visites et expositions peuvent ainsi être un **efficace facteur déclenchant,** sans lequel on n'aurait pas l'idée de « jouer aux courbes » sur ordinateur.

De plus, la seule fréquentation d'ordinateurs et de logiciels de géométrie ne saurait nous procurer l'enchantement de la symbiose « courbes mathématiques-univers familier », bien mise en valeur par l'exposition « Au delà du compas ».

Pour un monde mathématique multiforme et vivant, ne négligeons ni les expositions (pas seulement en géométrie d'ailleurs), **ni les ordinateurs**, valorisés par elles et si faciles d'accès, qui feront ensuite merveille !

Bibliographie (ouvrages en français)

Ci dessous la « plaquette » dont il est question est celle jointe au précédent bulletin sous le titre « 2001-2002, l'APMEP vous propose ».

[1] Brochure n° 202, APMEP-Palais de la Découverte, p. 18 de la plaquette. 168 pages-150 courbes, 3,80 euros.

[2] Brochure « Au-delà du compas », d'accompagnement de l'exposition.

[3] « Activités mathématiques » de Miguel de Guzman. 1990. Presses polytechniques et universitaires Romandes.

[4] « Dictionnaire raisonné des mathématiques » d'A. Warusfel. 1966 Le Seuil.

[5] « Atlas des mathématiques », par F. Reinhardt et H. Soeder 1997. Le livre de poche.

[6] « Géométrie et compléments » par R.Deltheil et D. Caire 1951 Réédition Gabay.

[7] « Éléments de géométrie du plan », par M. Abdeljaouad. Brochure APMEP n° 504. Cf. plaquette page 19.

[8] « Les mathématiques dans la réalité » par E. Castelnuovo. Trad. J. Meria (1979). Cédic

[9] Brochures APMEP n^os^ 124,125, 136 et 137 de Roger Cuppens (cf. plaquette, pages 18 et 19).

Les figures de l'article sont, pour beaucoup, extraites des brochures [1] et [2].

Annexe

L'exposition insiste sur des interventions de courbes mathématiques dans notre univers familier. La brochure d'accompagnement y consacre l'essentiel de quelque trente six pages de son second article. C'est dans cette optique que je me suis placé.

Mais les courbes mathématiques proposées dans l'exposition interviennent tout au long de l'histoire des mathématiques pour apporter leur pierre à la résolution des grands problèmes qui la traversent ou susciter de nouveaux champs de réflexion..

La brochure d'accompagnement de l'exposition y consacre quelque vingt pages de son premier article.

Je renvoie aussi :
– à la brochure de Jean Aymès (APMEP nº 70) sur tout ce qui a tourné autour de la trisection de l'angle,
– aux brochures APMEP nºs 124, 125, 136, 137 (à paraître), de Roger Cuppens sur Cabri et la géométrie.

Mais je préciserai ci-après des interventions relatives au Calcul des variations :

Branche importante de la mathématique moderne, ce calcul *traite des problèmes d'extrema* pour des fonctions définies sur des espaces de Banach (espaces normés complets – i.e. où toute suite de Cauchy est convergente –).

L'un des moteurs de la « méthode des variations » mise au point par Lagrange vient des *recherches de Jakob Bernoulli* (puis d'Euler sur des questions analogues) sur le *problème de la cycloïde brachystochrone*.

De ce calcul-là relèvent aussi des problèmes majeurs relatifs aux courbes ou surfaces. Citons, par exemple :

a) le très ancien *problème de l'isopérimètre* (en gros : parmi toutes les courbes planes fermées d'égal périmètre, quelle est celle qui enclot l'aire maximale?) : les « villages en rond » ont expérimentalement répondu !

b) les problèmes résolus « naturellement » par les bulles de savon, ou les abeilles avec les alvéoles des ruches…

c) celui de la *chaînette* (cf. figure page 642) : par rotation autour de son axe de symétrie, elle engendre un *caténoïde* qui possède la propriété suivante : « l'aire bornée par une courbe tracée sur cette surface est minimale parmi les aires des surfaces courbes limitées par ce contour ».

d) la recherche des *géodésiques*, c'est-à-dire du plus court chemin entre deux points A et B d'une surface donnée (cf. grands cercles d'une sphère… et détermination des itinéraires des transports aériens).