

Une approche sensible de la géométrie

Jean-Charles Pourtier(*)

APMEP

HISTOIRES DE COURBES

« La géométrie ne nous apprend pas à tracer des lignes, elle les suppose tracées ; il est donc nécessaire qu'avant de commencer la géométrie, on apprenne comment tracer les lignes de façon précise »
NEWTON Principes de philosophie naturelle 1686

TITRES DES PANNEAUX

1. Traçons des courbes cissoïdales
2. La cissoïde de Dioclès et la duplication du cube
3. Traçons des conchoïdes
4. Conchoïde et trissection de l'angle
5. Courbe de Watt
6. id.
7. Les coniques
8. La parabole
9. L'ellipse et l'hyperbole
10. Ovale de Cassini
11. Cycloïde
12. Hypocycloïde et épicycloïde
13. Pantographe
14. Inverseur de Peaucellier
15. id.

Cette exposition a été réalisée par la Régionale AQUITAINE de l'ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES dans le cadre de l'année 2000, déclarée « année des mathématiques » par l'UNESCO.

Affiche de l'exposition

(*) Lycée Fernand Daguin, 33700-MÉRIGNAC.

A) Introduction

La régionale a décidé de réaliser une exposition susceptible de circuler dans les divers établissements de l'académie. Ses objectifs étaient :

- Associer considérations théoriques et constructions graphiques de courbes classiques de l'histoire des mathématiques.
- Associer la notion de transformation à celle d'action d'un mécanisme.

B) Préparation

Cinq groupes (deux à trois personnes⁽¹⁾) se sont réparti la tâche : conchoïdes et cissoïdes (n° 1, 2, 3, 4), courbe de Watt (n° 5 et 6), coniques (n° 7, 8, 9), puis ovales de Cassini, hypo- et épicycloïdes (n° 10, 11, 12), pantographe et inverseur de Peaucellier (n° 13, 14, 15)⁽²⁾.

Leur premier travail a consisté à rassembler une documentation (bibliothèques, documents personnels, Internet, ...).

La part d'étude théorique, celle d'adaptation des appareils à construire et celle de mise en page des panneaux différaient d'un groupe à l'autre. Les réunions communes ont néanmoins facilité la tâche et surtout permis d'harmoniser la mise en page. Par exemple, on n'a pas choisi un même fond pour tous les panneaux afin d'éviter la monotonie et de permettre aux visiteurs de l'exposition de mieux se repérer.

Certains panneaux furent échangés pour vérifier la lisibilité des solutions proposées, mais aucune systématisation n'a été réalisée dans ce sens.

C) Les panneaux

Les panneaux sont en pvc de 3 mm d'épaisseur et de dimension 60 × 80 cm, ce qui optimise l'utilisation des plaques du commerce. Leur résistance aux manipulations est meilleure que celle de panneaux en mousse, trop fragiles.

Toutefois le transport des plaques nécessite une protection. Or, on trouve dans le commerce des cartables en plastique de 60 × 80. La réduction de la dimension des panneaux à 58 × 78 cm devient nécessaire pour les utiliser.

D) Réalisation des machines

Grâce à des relations de relations, nous avons bénéficié de l'aide et de la compétence d'un professeur de Lycée Professionnel, d'un enseignant de menuiserie dans une Section d'Enseignement Général et Professionnel Adapté, du responsable de cette formation et de l'enthousiasme de l'un de leurs élèves⁽³⁾. Leur acceptation spontanée de coopération nous a d'autant plus touchés qu'elle allait nécessiter l'adoption (l'adaptation) d'un langage commun.

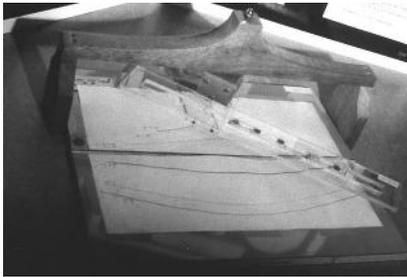
Les machines furent, en général, construites à partir de chutes d'atelier, ce qui a considérablement réduit les coûts.

(1) Outre les noms cités dans l'article, ont participé à la réalisation : Annick Baillou, Françoise Bastiat, Marianne Campagnolle, Chantal Coudurié, Chantal Dauriac, Dominique et Pierre Grihon, Jacqueline Grillet, Danièle Sabatié, Annie Sénégas, Nadine Valdivieso, Denis Vergès.

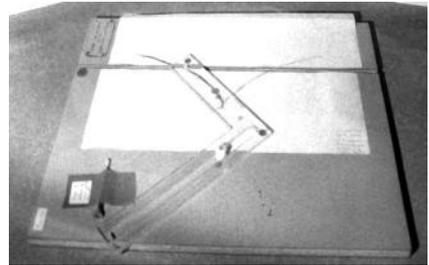
(2) Les définitions et illustrations des courbes se trouvent dans la brochure APMEP n° 202 [1].

(3) MM. Passérieux (LP), René Ursenbach, Alain Ménard, Mickaël Martin (SEGPA).

• La réalisation des machines – conchoïde et cissoïde – a demandé beaucoup de patience de la part de nos interlocuteurs. Pour la conchoïde, la fabrication d'un prototype fut nécessaire. Les deux machines sont en plexiglas et en contreplaqué mélaminé gris. Les plaques de 50×40 cm environ pour la conchoïde et de 70×50 cm pour la cissoïde permettent d'installer une feuille de papier A3, entière pour la cissoïde et partagée par la milieu pour la conchoïde. Nous avons pris les modèles dans [9].



Conchoïde

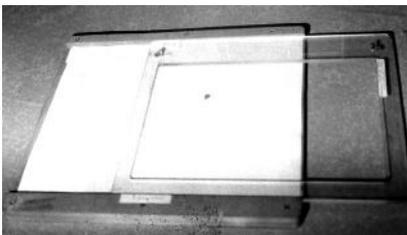


Cissoïde

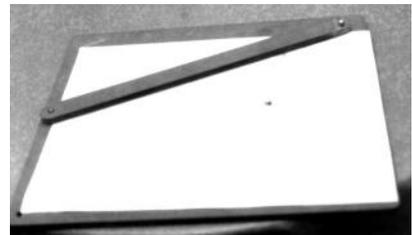
• Les coniques.

La machine – parabole – s'appuie sur la définition par foyer et directrice. Un livre ancien [4] propose de faire glisser le petit côté d'une équerre sur une règle. Les extrémités d'une ficelle sont fixées, l'une au troisième sommet de l'équerre, l'autre en un point du plan support. La position du crayon le long du second côté de l'angle droit de l'équerre est déterminée en tendant la ficelle. En faisant glisser l'équerre, le crayon décrit un arc de parabole (exercice). Hélas, en pratique, en tendant la ficelle, l'équerre bascule ! Pour cette raison, nous l'avons remplacée par un cadre en plexiglas glissant entre deux guides (un seul degré de liberté).

Les machines – ellipse et hyperbole – utilisent la propriété bifocale. Le montage sur une plaque d'isorel dur de 40×50 cm permet l'utilisation d'une feuille format A3.

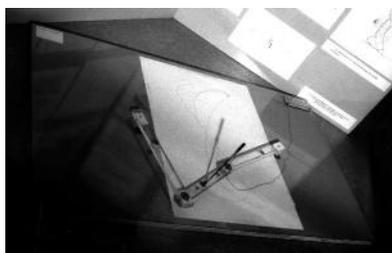
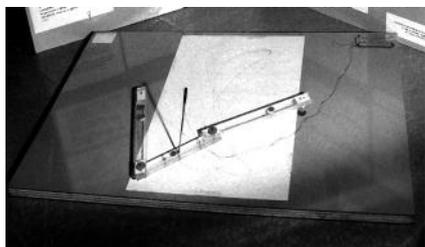


Parabole



Hyperbole

• Les courbes de Watt utilisent les modèles de [10] et [2]. Ici les plaques sont en bois, encore de dimension 40×50 cm pour la même raison ; les guides sont reliés à la plaque par de petits clous amovibles. Des guides de longueurs différentes sont ainsi utilisables.



Machine de Watt

- La cycloïde est visualisée en faisant rouler une boîte de conserve devant une feuille de papier. Le support est constitué de deux plaques à angle droit et la boîte roule sans frottement, un crayon fiché sur son bord. Une ficelle fixée aux extrémités de la plaque et logée dans une gorge assure à la fois le guidage de la boîte et l'absence de frottement.



Cycloïde

- Pour les hypocycloïdes et les épicycloïdes, nous avons utilisé dans un premier temps le jeu nommé « spirographe », mais, peu fiable, nous l'avons abandonné. Nous cherchons actuellement un constructeur capable d'une autre réalisation.

- Le pantographe et l'inverseur de Peaucellier sont eux construits en acier. Les dimensions du premier peuvent être choisies quelconques. Pour l'inverseur, en revanche, il est impératif de faire des calculs préalables afin d'obtenir un déplacement rectiligne suffisant.

Le glissement des pièces de plexiglas est amélioré avec une bombe de silicone.

Enfin le transport des machines dans des conditions de sécurité satisfaisantes est une autre difficulté à surmonter. Les caisses de plastique courant ne permettent pas de ranger, ni de contenir certaines de ces machines.

E) L'utilisation de l'exposition et les réactions

1) La première sortie

L'exposition a été présentée dans la région béarnaise – Pau et Orthez. Ceci a permis d'apporter d'importantes modifications (cas de la parabole). Les collègues ont constaté un intérêt certain pour les manipulations, mais aussi la nécessité d'une présence constante auprès du matériel pour aider à la prise en main, entretenir le matériel, changer les feuilles, aiguiser les crayons, ...

2) Un essai grandeur nature : chronique d'une exposition⁽⁴⁾

Dans notre lycée, nous sommes convaincus qu'il faut montrer que les mathématiques sont accessibles à tous et nous avons eu envie d'expérimenter cette exposition.

Nous profitons de la journée Portes Ouvertes, fin mars 2001, pour la montrer. Huit jours plus tôt, nous l'avons réceptionnée à trois collègues. Les panneaux et les appareils traceurs de courbes ont voyagé sans problèmes dans une R5.

N'ayant pas eu l'occasion de voir l'exposition fonctionner, nous sommes quelque peu perplexes en voyant les appareils arriver en pièces détachées. Il faut les remonter, identifier avec des pastilles colorées sur les tiges les points cités dans les exposés. Nous préparons de petits textes décrivant pas à pas le mode d'emploi pour permettre les manipulations en complète autonomie.

Nous commençons à réfléchir aux activités de cours susceptibles de compléter la visite (travail sur les angles, la configuration de Thalès, les homothéties, les courbes paramétrées, ...). Le lien entre pantographe et homothétie est évident. L'utilisation des calculatrices et de l'ordinateur ouvre une autre voie. On peut, par exemple, faire observer comment apparaît sur un écran l'image par inversion d'une droite passant par le pôle (parcours incrémental).

À l'issue de notre après-midi de préparation, nous avons le sentiment d'avoir encore beaucoup à apprendre, mais ... il faut se lancer !

La décision est prise d'accrocher les panneaux sur les murs du hall des Premières. C'est un lieu de passage obligé pour toutes les classes, lorsque les élèves se rendent au self. Des tables sont placées au dessous des panneaux pour accueillir les instruments. Les plus fragiles ne resteront posés qu'en présence de personnes assurant une permanence.

Un planning de présence est établi car nous nous rendons compte qu'il faut « présenter l'exposition », sinon le public n'ose pas manipuler. Par contre, dès qu'un élève commence à faire fonctionner un appareil, les autres suivent. Ce ne sont pas obligatoirement les meilleurs de nos classes qui sont les plus curieux. Par exemple, Suzanne (en terminale L), Julien (en grande difficulté en première S et réorienté en première STT) se sont passionnés pour cette exposition. Nous avons eu plusieurs réactions du type « je ne pensais pas que les mathématiques pouvaient être aussi intéressantes, moi qui ai toujours été nul ! ».

Progressivement, nous sommes plus à l'aise et essayons de rendre ludique l'exposition. Ainsi, l'exposé sur la cycloïde devient un jeu à la manière de « Questions pour un champion ».

Voici la fiche du meneur de jeu :

- Elle est parfois appelée « l'Hélène » de la géométrie, pas seulement en raison de ses belles propriétés, mais aussi parce que de nombreux mathématiciens célèbres se sont querellés à son sujet : Descartes, Roberval, Pascal, Newton, Torricelli, ...

(4) Martine B., Anne G., Jean-François F.

- Les dentistes n'avaient pas encore inventé la roulette, mais Pascal, qui souffrait d'une violente rage de dents, réfléchit à ses propriétés et oublia ses douleurs. C'est la plus simple des roulettes.
- Sa forme donne à l'arche en béton d'un viaduc la plus grande résistance.
- Un cercle qui roule sans glisser sur une ligne droite la fait apparaître.
- C'est la courbe de la descente la plus rapide. Elle est brachystochrone et tautochrone⁽⁵⁾.
- Son nom est ...

Voici quelques autres « à côtés » : la reproduction d'une gravure sur le pendule cycloïdal de Huygens, une lampe avec abat-jour dont la lumière en se projetant sur le mur dessine une hyperbole, une couronne de pain découpée pour les ovales de Cassini, une casserole en inox remplie aux trois quarts de lait pour voir une néphroïde (« tiens, il y a des maths dans mon petit déjeuner ! »).

Organiser une exposition mobilise beaucoup d'énergie. Pour l'avenir, il nous semble souhaitable d'organiser une « Générale » réservée aux collègues de mathématiques et à tous autres intéressés. Chacun se sentirait ainsi concerné et apporterait idées et suggestions pour intégrer cette exposition dans nos activités « ordinaires ».

F) En projet

La richesse de l'exposition lui permet d'être scindée en plusieurs lieux, si nécessaire, sans en diminuer les qualités.

Une première approche du C.D.D.P. de Gironde nous laisse espérer la signature d'une convention. Dépositaire de l'exposition, le C.D.D.P. se chargerait de gérer sa circulation dans le département. Étendre cette circulation à l'académie par l'intermédiaire des autres C.D.D.P. serait la solution la plus simple et la plus efficace. Par ailleurs il est prévu de réaliser des plans des différentes machines pour qu'elles soient aisément reproductibles. À vrai dire, nous souhaitons la reproduction par d'autres, leurs remarques et suggestions seraient réciproquement utiles.

Bibliographie

En langue française :

[1] Courbes mathématiques. Brochure APMEP. n° 202, 1996. 165 Pages, 150 courbes. Prix : 25 F ; 3,80 € .

[2] De points en courbes. C.R.D.P. de Dijon, 1987.

[3] Maths en Seine. Compte-rendu du congrès « Math en jeans » du 7, 8, 9 mai 1994.

[4] Deltheil et Caire. Géométrie et compléments, 1950.

[5] Lemoyne. Les lieux géométriques en mathématiques spéciales. 1923.

[6] Teixeira. Courbes spéciales remarquables, planes ou gauches, 1909.

[7] Le plot matériel. Systèmes articulés n°s 1 et 2. Régionale APMEP d'Orléans-Tours. Conception : Michel Darche. 1983.

(5) Cf. [11] et [8]. Cet énoncé pédant a provoqué l'hilarité prévue. Il a été assorti d'une explication étymologique.

[8] (récent) Catalogue de l'exposition « Autour du compas, la géométrie des courbes » de la Scuola Normale Superiore di Pisa présentée au Palais de la Découverte, Paris en 2000.

En langue anglaise :

[9] Brieskorn-Knörrer. Plane algebraic curves (Birkhäuser, 1986).

[10] Beyer. The kinematic synthesis of mechanisms (Chapman Hall, 1963).

Autre :

[11] Dictionnaire encyclopédique Quillet, mai 1988.

N.B. Les livres épuisés ont été consultés à l'Université de Bordeaux (bibliothèques de mathématiques et mécanique).

N.D.L.R. Cf. aussi les pages 645 à 659 du présent Bulletin .