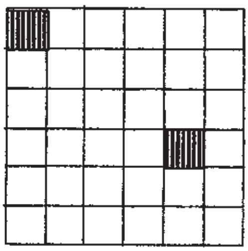
Mathématiques au Palais

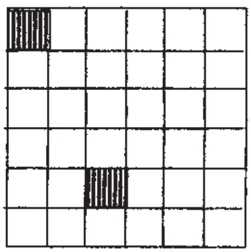
Claudie Missenard

Parmi les musées scientifiques de la région parisienne, il en est un qui devrait être particulièrement cher au cœur de tous les enseignants car ils y sont chez eux : le Palais de la Découverte.
Il a ce petit parfum d'autrefois dans sa célébration de l'émergence de la science au siècle précédent. Mais une constante réflexion autour des espaces existants et de leur modernisation lui conserve un intérêt actuel.
Ni musée ayant à montrer des collections, comme le respectable Muséum, ni musée interactif (les mauvaises langues disent presse-boutons) comme l'impressionnante Cité des Sciences, le Palais est avant tout un musée d'expérimentation. La science s'y montre à travers des exposés présentant des expériences, cette observation n'étant pas passive mais guidée, pour amener à construire des hypothèses, à les valider, à comprendre ce qu'on a sous les yeux (à différents niveaux bien sûr, puisque, pour une même expérience, les connaissances scientifiques des observateurs peuvent être très inégales).
Les exposés phares du Palais (le manège inertiel, l'air et le vide, et bien sûr la célébrissime électrostatique) sont des exemples de cette conception muséographique. Mais, si une telle approche est aisée à concevoir en physique ou en chimie, elle est évidemment plus difficile à mettre en œuvre en mathématiques. C'est pourtant ce que le département de mathématiques, avec à sa tête le passionné et passionnant Jean Brette, réussit à faire, pour ceux qui se donnent la peine de venir jusqu'à lui.

Je vais décrire ici un atelier d'une heure et demie, vécu l'hiver dernier.
Les acteurs en sont la moitié d'une de mes classes de sixième. Vu la nature de l'activité, il vaut mieux que le groupe soit limité à une quinzaine (l'autre partie de la classe était accueillie dans un parcours qui l'a beaucoup intéressée sur l'origine de la vie). Les élèves travaillent en binôme.

La situation proposée utilise un matériel simple distribué à chaque groupe : un damier de 6 cases sur 6, qui comporte deux cases coloriées en rouge : la case du coin en haut à gauche et une autre case, et un jeu de 17 « dominos », c'est-à dire de rectangles pouvant recouvrir deux cases du damier.

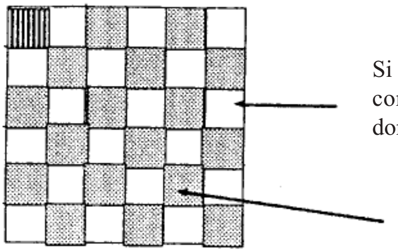




un damier un autre damier un domino

Les damiers distribués diffèrent tous par la place de la deuxième case rouge.

La consigne, donnée au départ est : recouvrir avec les dominos toutes les cases du damier (sauf les cases rouges).
Les élèves se jettent dans la tâche avec ardeur. Assez vite certains groupes triomphent : « on a réussi », tandis que d'autres font grise mine : « ça marche pas votre truc, on a tout essayé, on n'y arrive pas ». Ceux qui ont réussi tentent en vain d'aider ceux qui n'ont pas réussi et on arrive à la certitude morale que, dans certains cas, la tâche est facile, réalisable en un temps raisonnable avec un peu de méthode et, dans d'autres, elle semble impossible. L'échec proviendrait donc de la situation elle-même et non d'une mauvaise méthode du groupe en échec.
Jean Brette propose alors une organisation collective pour mettre en commun les recherches. Il dessine le damier au tableau et propose à chaque groupe de venir colorier la place de sa case rouge, en vert si le groupe a réussi à poser ses dominos, en noir si après un temps d'essais suffisant, il a jugé la tâche impossible.
Tout le groupe s'attelle à la cartographie du damier et on voit se créer sous nos yeux le joli coloriage collectif ci-dessous :

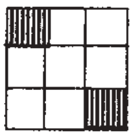


Si la deuxième case interdite est une case comme celle-ci, le recouvrement par les dominos est possible.

Si la deuxième case interdite est une case comme celle-ci, le recouvrement par les dominos semble impossible.

Dans une position sur deux de la case interdite, on a trouvé une (et même plusieurs) façon(s) de recouvrir le reste avec les dominos. Dans une position sur deux, cela paraît ne pas être réalisable.
Jean Brette discute avec les élèves de la nature de la certitude : dans les cas où on a une solution, on est sûr de son existence puisqu'on la tient, on l'a sous les yeux, mais dans les cas où on n'a pas trouvé, comment être sûr que ce n'est pas une erreur de méthode qui nous empêche de trouver ? De quelle nature est l'impossibilité ? D'où vient le problème ?
Les enfants comprennent bien ce débat essentiel sur la preuve et Simon a alors une vraie idée de mathématicien : on va essayer avec des damiers. plus petits.

On commence dans l'ordre avec un damier 2×2 et un unique domino : il est facile de comprendre qu'on ne peut pas recouvrir le damier avec un domino insécable si les deux cases interdites sont des « coins » opposés.



Le damier suivant 3×3 est intéressant aussi : 9 cases au départ, 2 cases interdites : il en reste 7. Impossible de recouvrir 7 cases avec des dominos qui recouvrent forcément un nombre pair de cases.

Il s’ensuit une discussion assez longue au cours de laquelle on s’interroge sur le nombre de cases du damier en fonction de son côté, autrement dit on ouvre une parenthèse pour s’intéresser au carré d’un entier. En raisonnant sur le dernier chiffre du nombre, les élèves s’aperçoivent qu’un carré ne peut pas se terminer par 2, 3, 7 ou 8. En même temps, le groupe découvre que le carré d’un nombre impair est forcément impair. Du coup, cela permet d’éliminer déjà tous les damiers de côté impair et donc où le nombre de cases est impair, pour lesquels aucun recouvrement par dominos ne sera possible pour les raisons de parité découvertes avec le damier 3×3.
La tâche ainsi diminuée de moitié, les élèves s’attaquent, à la main, au damier 4×4 qui est suffisamment petit pour obtenir des certitudes par des raisonnements déductifs (intéressants en eux-mêmes) qui permettent l’épuisement des possibilités.
Sur ce damier, on obtient, et cette fois on l’a prouvé puisqu’on a examiné l’arbre de toutes les possibilités, le coloriage (une case sur deux possible, une sur deux impossible) découvert expérimentalement. au début de la séance sur le damier plus grand.
Mais toutes ces découvertes ont pris du temps et on voit bien qu’on ne va pas pouvoir explorer manuellement une infinité de cas.
Jean Brette termine alors en dévoilant aux élèves le « pot aux roses », l’argument qui apporte la conviction qu'on recherchait depuis une heure et demie.
Je pense que les élèves ne l’ont pas tous compris, certains avaient décroché un peu plus tôt, mais il a convaincu ceux d’entre eux qui s’étaient le plus largement investi.
Pour les lecteurs qui n’auraient pas encore rencontré cette situation, voilà l’argument en question, réécrit ici pour le lecteur adulte (ce n’est bien sûr pas dans ces termes que Jean Brette l’a expliqué aux enfants).
Imaginons que le damier, au lieu d’être uniformément blanc, ait été colorié en noir et blanc comme les damiers habituels.
Théorème :Si on pose un domino recouvrant deux cases sur un tel damier bicolore, ce domino recouvre forcément une case de chaque couleur.
Corollaire : On ne pourra donc pas réussir à recouvrir avec des dominos un damier où le nombre de cases blanches n’est pas égal au nombre de cases noires (ce qui se produit quand on « interdit » une case de même couleur que celle du coin rouge imposé). CQFD.

J’ai tenté de relater rapidement cet après-midi de recherche. J’ai bien conscience que ce résumé, dans sa sécheresse, masque la richesse de l’activité qu’ont vraiment eu les élèves à cette occasion.
Tous les ingrédients étaient ici réunis :
– un bon thème de recherche, parfaitement adapté pour des élèves de CM2, Sixième ou Cinquième, suffisamment riche et suffisamment simple à la fois.
– des résultats partiels facilement atteignables, un démarrage d’activité suffisamment simple et pratique pour mettre au travail tous les élèves.
– une émulation et une certaine fierté dans la nature collective de certaines phases.
– un animateur de talent, qui sait faire émerger les idées sans les imposer et les extraire des propos parfois confus tenus par les enfants, laisser des phases de

piétinement mais aussi sachant les arrêter avant que les participants ne se soient lassés.

Quel plaisir alors pour l'enseignant d'assister, de l'extérieur, au travail mathématique de ses élèves, à leurs essais, à leurs difficultés de communication ou de concentration, à l'émergence de leurs convictions.
Ce n'était pas la première fois que j'accompagnais des élèves pour travailler sur cette activité. Ce fut particulièrement réussi cette année, ce qui n'est pas garanti. Mais n'est-ce pas justement parce que c'est différent à chaque fois que ça vaut la peine d'essayer…
J'ajouterai que le Palais de la Découverte pratique des prix d'entrée aux scolaires tout à fait privilégiés et qu'il propose tant de choses que la vraie difficulté quand on s'y rend est plutôt de renoncer à la tentation d'en faire trop.
Pour nous, professeurs de mathématiques, le Palais de la Découverte est un lieu unique où les élèves peuvent avoir vraiment, sous nos yeux, grâce à Jean Brette et à ses collaborateurs, une activité qui a toutes les caractéristiques de la recherche mathématique.