De l'influence des calculatrices sur la pédagogie des mathématiques

Christian Hakenholz

Tout le monde est bien convaincu de la nécessaire utilité des calculatrices dans l'enseignement. Utilité bien acquise comme lorsqu'il s'agit de calculer la valeur approchée de $\sqrt{15}$ au millième près, un calcul qui a fait le « bonheur » des élèves de quatrième au début des années 70, lorsqu'ils passaient une bonne heure à faire les calculs par essais-erreurs à la main. Utilité à acquérir, comme pour le calcul des primitives qui fait encore le « bonheur » des élèves de la fin des années 90.

Utiles parce que elles simplifient le travail, mais utiles aussi parce que elles amènent à se poser quelques questions sur notre façon d'enseigner les mathématiques ou du moins d'utiliser les écritures mathématiques.

Les premières calculettes nous ont fait nous rendre compte que la notation fractionnaire si évidente devait beaucoup à la position des nombres sur la ligne, mais le rôle de cette position n'était pas toujours précisé à nos élèves. Un sous-entendu qui les surprend toujours lorsqu'ils entrent l'expression $\dfrac{a}{b \times c}$ sous la forme $a/b \times c$, alors qu'ils ont obtenu du succès lorsqu'ils ont entré de même $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d}$ sous la forme $a/b \times c/d$.

Un nouveau saut intéressant est obtenu par les machines qui affichent en écriture classique (« Pretty Print » est plus joliment dit) ce quelles ont compris de l'expression rentrée. Ainsi l'élève analyse lui-même la différence entre ce qu'il croit avoir dit et ce que l'on peut comprendre. Avant c'était à la charge du professeur d'expliquer cela, mais je n'ai jamais eu l'impression de vraiment convaincre mes élèves en leur expliquant ce dysfonctionnement. Peut-être était-ce dû au fait qu'ils sentent souvent chez l'enseignant une réserve par rapport à l'usage des calculatrices. Ainsi quand un professeur leur parle des calculs machines, c'est surtout pour leur montrer les erreurs d'une machine (quoique de plus en plus rares), oubliant un fait qui me semble important : les machines, ça fait aussi des calculs justes.

Je me permets au passage d'insister sur une idée simple : « Si la machine fait plus vite que toi, alors laisse faire la machine, sinon fais-le à la main ». Idée que je mets en pratique chaque fois que j'ai à faire une vaisselle : si c'est celle d'une réunion de famille, je la fais à la machine, si c'est une vaisselle raisonnable, je la fais à la main.

De même, pour diviser un décimal par 10, les élèves devraient être convaincus que c'est plus rapide de le faire de tête qu'en passant par la machine ; par contre, pour diviser par 735, je fais confiance à la machine. De même, pour la dérivée de $f(x) = x^2 - 7x$, le calcul à la machine doit être inutile ; par contre pour la dérivée de $f(x) = \dfrac{\ln(x) + x^2 - 7x + 3}{x - \cos(x)}$… Ceci pour dire que contrairement à une rumeur, le calcul machine ne dispense pas du calcul à la main.

Maintenant, devant enseigner les maths, à la grande question « Qu'est-ce que faire des mathématiques ? », je réponds « c'est ce qu'il reste à faire quand on se sert d'une calculatrice ». Pour certains ça ne paraît pas grand chose (même chez un ancien Ministre de l'Éducation), mais c'est tellement plus formateur que faire des pages de calcul (qui ne riment souvent à rien) comme, par exemple, résoudre dans $\mathbf{R}$ « $2\ln(x)^2 - \ln\left(\dfrac{x}{2x-3}\right) = 0$ ». Dans quel contexte puis-je avoir besoin de résoudre une telle équation ? À quoi bon ne savoir factoriser un polynôme qu'à la condition sine qua non que tous les coefficients soient mûrement réfléchis, alors que si un seul d'entre eux venait à perdre son sang-froid…

La dextérité dans le calcul numérique est-elle la preuve d'une bonne compréhension des mathématiques ? Curieusement, étant d'un âge respectable, je vois pas mal de jeunes collègues être persuadés que oui, en infligeant des calculs innombrables et innommables à leurs élèves. Ces derniers ne demandent pas mieux : en effet, en calculant, ils n'ont pas à réfléchir !

Je ne suis pas psy-quelque-chose, mais je rappelle deux faits :
– les parents qui battent leurs enfants sont souvent d'anciens battus.
– certains handicapés mentaux sont des calculateurs prodiges.

Mais je m'égare, là n'était pas le propos, je voulais parler de l'influence de la calculatrice sur l'écriture des mathématiques. Ainsi nous avons vu (nous, les enseignants d'un certain âge) se modifier les noms de certaines fonctions, en devenant plus explicites. Sans vouloir ergoter sur l'origine de la transformation : est-ce pour rendre plus explicite ou pour être conforme aux touches d'une calculatrice anglo-saxonne ? Le fait est que, au demeurant, l'écriture anglo-saxonne est plus pédagogique. Pour se consoler, on pourra se féliciter d'avoir appelé « ordinateur » une machine que les américains appellent un « computer », la fonction d'une telle machine étant plutôt « d'ordonner » que de « calculer ». Un peu comme le presse-citron sert surtout à presser des oranges. Mais je m'égare encore, je reviens aux noms des fonctions :
– « log » et « Log » (Ah ! les petits et les grands log, sans parler des petits et grands cosinus, que de souvenirs !) en « ln » et « log », notations plus explicites.
– « tg » en « tan », qui uniformise la notation en trois lettres initiales des fonctions trigonométriques.

– la disparition de la fonction « cotg » est elle dû à son double emploi avec la fonction tan ou son absence sur un clavier de calculatrice ? ou est-ce le problème de la poule et de l'œuf ?
– pourquoi ne pas souhaiter également que Arccos, Arcsin et Arctan deviennent enfin tout simplement $\cos^{-1}$, $\sin^{-1}$ et $\tan^{-1}$ comme c'est écrit sur le clavier, et tellement plus explicite ?

Mais on peut faire mieux que tout cela : la façon de parler à une calculatrice fait réfléchir sur la façon d'écrire en math et permet de remettre en question des habitudes d'écriture si habituelles que l'on n'en voit plus la contradiction.

Prenons, par exemple, « $\cos x$ », qu'une machine demande d'entrer « $\cos(x)$ », des parenthèses, mais oui et avec raison. Car enfin cos est une fonction, je n'ai pas été autorisé à noter une fonction $f\ x$, mais bien $f(x)$, alors pourquoi ce régime spécial pour la fonction cos ?

Une écriture du genre « $\cos x + x$ » est quand même bien abusive. Le problème, c'est que pour nous, enseignants, elle est devenue habituelle. C'est loin d'être le cas pour nos élèves qui peuvent à juste raison l'interpréter comme « $\cos(x + x)$ ». Ainsi un de mes élèves écrivant $2 \cos x = \cos 2\, x$ et m'expliquant $2 \times \cos x = \cos x \times 2 = \cos 2\, x$ en mettant les parenthèses où bon lui semblait, ne commettrait peut-être pas l'erreur si l'écriture adoptée était « $\cos(x)$ ». La notation non parenthésée étant une notation « pousse au crime », il ne faut donc pas s'étonner que le crime soit commis. La notation parenthésée doit être rendue obligatoire pour toutes les fonctions sans distinction d'origine.

Quant à la notation $\cos^2(x)$ qui apparaît pour la première fois en troisième lors de la formule $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, elle est refusée par la calculatrice qui préfère la notation $\cos(x)^2$. Cette dernière n'étant pas ambiguë, cos séparé de (x) n'ayant pas de sens, c'est bien de $(\cos(x))^2$ qu'il s'agit et non de $\cos(x^2)$, bien que, dans un premier temps, il n'est pas inutile d'avoir des parenthèses supplémentaires pour confirmer le sens unique de $\cos(x)^2$.

Mais, pour en revenir à la notation fonctionnelle, $f^2(x)$ signifie en général $f \circ f(x)$. Pourquoi donc cos serait-il un cas à part ? La notation usuelle n'est même pas cohérente.

Autant d'abus d'écriture que refuse la calculatrice, et sa bonne volonté ne peut être mise en doute (contrairement à certains élèves). Bien sûr, ce sont des usages courants, mais justement, pour l'élève qui découvre, ils ne sont pas d'un usage courant. Pour inciter les enseignants à abandonner ces notations abusives, le libellé des programmes devrait tenir compte de ces notations, les seules compréhensibles par les élèves ou du moins les seules explicables. Merci à la calculatrice qui fait se poser de telles questions de fond.

Quant à l'apport des calculatrices utilisant le calcul formel, il n'est pas négligeable non plus. Combien de fois n'a-t-on pas posé à nos élèves une question du type « Résoudre l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ » et voulu poser la même question à la calculatrice « solve($x^2 + x + 1 = 0$) ». Celle-ci, beaucoup moins docile que nos élèves, refuse d'obtempérer sous prétexte que l'on n'a pas précisé l'inconnue : à nous d'admettre qu'elle a raison. Que se passerait-il si un élève, dans le genre pointilleux, nous disait « par rapport à quoi M'sieur ? ou M'dam', bien sûr ».

Une fois rectifié le tir, deuxième surprise, elle répond au choix, suivant le paramétrage, « false » ou « – 1/2 + $\sqrt{3}$ i or – 1/2 – $\sqrt{3}$ i ». Bon sang, mais c'est bien sûr ! Il faut préciser non seulement par rapport à quoi on résout une équation, mais encore dans quel domaine. C'est tellement sûr qu'on ne le précise pas toujours à nos élèves.

De même, si on demande de trouver une dérivée de $f(x)$ en posant à la calculatrice « d($f(x)$) », celle-ci demande de préciser la variable ; elle exagère peut-être, mais la dérivée d'une expression $f(x)$ sans autre précision ne pourrait-elle pas être 0 si on dérive par rapport à une variable y ?