Faut-il mettre les unités dans les calculs ?

Rémi Duvert(*)

Cette question « concrète », qui préoccupe un certain nombre de professeurs d'école et de collège, peut se formuler plus précisément ainsi : pour les situations faisant intervenir des grandeurs, faut-il habituer les élèves à écrire, dans les calculs, les unités avec les nombres (par exemple 3 kg + 5 kg = 8 kg), c'est-à-dire à calculer sur les grandeurs ?

Cet article ne prétend pas trancher (« oui, il faut » ou « non, il ne faut pas »)… Tout au plus développe-t-il quelques avantages et inconvénients, d'un point de vue pédagogique (ou didactique, si l'on préfère). Mais on se demandera auparavant ce qu'on peut faire « en théorie » (c'est-à-dire en respectant une certaine rigueur mathématique) ; en effet certains collègues ne savent pas toujours bien ce qu'il est « légal » d'écrire : par exemple des instituteurs s'interdisent d'écrire 4 m = 400 cm et utilisent une flèche : 4 m → 400 cm.

Que peut-on se permettre ?

Sans entrer dans la délicate question de la définition d'une grandeur[1], précisons d'abord de quelles grandeurs il s'agit, ici, de grandeurs mesurables, essentiellement : à l'école et au collège, des *longueurs*, des *aires*, des *volumes*, des *angles*[2], des *masses* et des *durées* ; on peut leur adjoindre les *prix*, très courants dans les problèmes donnés aux élèves de l'école primaire (avec, récemment, un changement d'unité !). N'oublions pas ce qu'on appelle les grandeurs-quotients, comme les *vitesses* et les *débits*, mais aussi les *prix par unité de masse*, par exemple. On rencontre bien sûr d'autres grandeurs, étudiées surtout en sciences physiques, mais moins souvent abordées en mathématiques.

On peut comparer entre elles des grandeurs (de même nature : par exemple des longueurs) ; on peut aussi les additionner, les multiplier ou les diviser par un nombre naturel, et, par extension, par n'importe quel nombre positif. Et tout cela sans avoir besoin ni de mesures, ni d'unités[3]… C'est sans doute parce qu'on associe trop tôt les grandeurs avec leurs écritures du type « nombre suivi d'une unité[4] » qu'on a

(*) I.U.F.M. de l'académie d'Amiens.

(1) On pourra se référer, en particulier, à deux ouvrages : « Le sens de la mesure », de Nicolas Rouche, aux éditions Didier Hatier (Bruxelles) et » Grandeur–mesure », tome 6 de la collection « Mots », publiée par l'A.P.M.E.P.

(2) Les angles posent cependant des problèmes spécifiques qui ne seront pas abordés ici.

(3) Il me semble important, dans l'enseignement, de travailler un certain temps sur les grandeurs (comparaisons, sommes, …) sans parler d'unités ; mais ce n'est pas l'objet de cet article.

(4) Dans cet article, comme dans l'enseignement, le mot « unité » peut avoir deux sens : soit

tendance à les confondre avec des nombres (avec leurs mesures) ; or une grandeur *n'est pas* un nombre : 5 ne désigne pas une longueur, et 5 cm ne désigne pas un nombre, mais la classe d'équivalence de tous les segments de longueur égale à 5 fois une autre longueur, notée 1 cm, et choisie ici comme unité de longueur.

Il n'est donc pas rigoureux d'écrire 5 = 5 cm, bien sûr, pas plus que 3 + 2 = 5 cm ; cela se corse pour l'égalité « AB = 5 » : elle est incorrecte si on a décidé que AB désigne une longueur, ce qui est en général le cas (même si c'est quelquefois implicite) ; elle est correcte si AB désigne une mesure ou une distance(5).

Par contre il est tout à fait normal d'écrire 6 km = 6 000 m, puisque le kilomètre se définit comme la longueur égale à 1 000 fois la longueur « un mètre ». Mathématiquement, il n'y a pas lieu d'employer un autre signe que « = » dans ce qu'on appelle les conversions.

De même on peut écrire 7 m^2 < 8 m^2, mais aussi 200 dm^2 < 4 m^2, alors qu'il est bien entendu inexact d'écrire 200 < 4.

Quant à l'addition dans un ensemble de grandeurs de même nature, elle se définit de manière rigoureuse en mathématiques ; ce n'est pas la même opération que celle qui porte sur les nombres entiers, mais on choisit en général d'employer le même signe (« + »), comme on le fait aussi pour les vecteurs, par exemple(6). Il est donc correct d'écrire 6 kg + 13 kg, mais aussi 6 kg + 13 g, et donc 6 kg + 13 g = 6 013 g (savoir si c'est habile pédagogiquement est une autre question…).

La soustraction pose les mêmes problèmes que celle définie dans l'ensemble des nombres entiers positifs : on ne peut pas soustraire une grandeur d'une grandeur plus petite ; cela dit, il est normal d'écrire 18 mm − 7 mm = 11 mm, etc.

La multiplication par un nombre, dite quelquefois externe, est d'une autre nature, car elle fait intervenir deux ensembles différents : celui des grandeurs en question et celui des nombres réels positifs ; mais le résultat appartient au même ensemble de grandeurs que celui du départ : le produit de la durée 25 s par le nombre 2 est une durée. Le problème est de savoir quel signe affecter à cette multiplication : on choisit souvent le signe classique (« × ») et on peut ainsi écrire 25 s × 2 = 50 s, par exemple.

À ce propos, les avis sont partagés quant à l'ordre des facteurs : certains (à l'école élémentaire, en particulier) s'interdisent d'écrire 2 × 25 s, en cohérence avec une certaine façon d'aborder la multiplication (considérée comme une « addition réitérée ») ; on peut cependant faire remarquer qu'à l'oral, on dit plus volontiers « 2 fois 25 secondes » que « 25 secondes fois 2 ». Notons également qu'on a l'habitude, pour la multiplication d'un vecteur par un nombre, de placer celui-ci avant le

---

celui de symbole officiel (« kg », par exemple), soit celui d'une grandeur parmi d'autres choisie comme unité (la masse « un kilogramme », par exemple) pour pouvoir parler de mesure.

(5) Mais cela pose d'autres problèmes (voir plus loin).

(6) Notons, par ailleurs, qu'en toute rigueur, l'addition dans l'ensemble des nombres naturels n'est pas la même que celle définie dans l'ensemble des nombres rationnels, etc. Mais là aussi, on utilise le même signe.

vecteur… On peut considérer que, d'un point de vue strictement mathématique, l'ordre des facteurs importe peu lorsqu'on emploie le signe « × ». Par contre, lorsqu'on omet ce signe, on peut décider de placer le nombre avant : ainsi 2AB est permis, mais pas AB2 (qu'on pourrait confondre avec AB^2 ou AB_2).

La question de la « division externe » d'une grandeur par un nombre se ramène à celle de la multiplication, puisque diviser par un nombre (différent de 0) revient à multiplier par son inverse.

Le produit d'une grandeur par un nombre ne doit évidemment pas être confondu avec le produit de deux grandeurs de natures différentes, appelé en général « grandeur-produit » (le kWh, par exemple, produit d'une puissance par une durée).

Les aires et les volumes sont des cas particuliers de grandeurs-produits ; on peut considérer une aire comme le produit d'une longueur par une longueur, et un volume comme le produit de trois longueurs, ou comme le produit d'une aire par une longueur. Là aussi, on choisit en général de garder le signe « × » et on peut ainsi écrire 7 m × 9 m = 63 m^2, ou même 30 m^2 × 1000 dm = 3 dam^3. Lorsqu'on manipule des lettres, on omet souvent le signe « × » (par exemple le volume d'un cylindre de révolution de rayon R et de hauteur H peut être noté $\neq R^2H$).

Les grandeurs-quotients se traitent théoriquement de la même façon ; si on utilise le signe « : », alors on peut écrire 40 km : 5 h = 8 km/h[7], ou 66 m^2 : 3 m = 22 m , etc.

Et, si l'on poursuit cette logique, on doit admettre[8] les écritures du type 14 m^3/s × 20 s = 280 m3 , ou 15 kg × 6 F/kg = 90 F, ou 24 km : 12 km/h = 2 h , etc.

Pour en finir avec les opérations sur les grandeurs, il reste à citer la division définie sur un ensemble de grandeurs, mais dont les résultats sont des nombres : le quotient (ou rapport) de la grandeur g par la grandeur h (de la même nature, et non nulle) est le nombre k tel que $k \times h = g$, le signe « × » correspondant à la multiplication externe évoquée plus haut. Il me semble qu'il n'y a pas de signe officiel pour cette division ; si l'on emploie « : », alors on peut écrire, par exemple, 32 hL : 8 hL = 4 . On peut aussi utiliser la notation fractionnaire, comme on le fait notamment lors de l'application du théorème de Thalès : si AM et AN désignent des longueurs, on parle du nombre (rapport de longueurs) $\dfrac{AM}{AN}$.

Pourquoi omettre les unités dans les calculs ?

D'abord … parce qu'on peut s'en passer ! Dans les multiples petits problèmes résolus par les élèves de l'école primaire et du début du collège, on peut faire les calculs sur les nombres seuls et rétablir les unités dans les résultats, et par exemple

(7) « km/h » se lit « kilomètre par heure », ou à la rigueur « kilomètre à l'heure », mais pas « kilomètre-heure », comme on l'entend trop couramment ; le kmh désignerait une grandeur-produit sans signification concrète usuelle.

(8) Toujours d'un point de vue mathématique ; pédagogiquement, cela se discute (voir plus loin).

écrire « la masse de la valise pleine est 15 kg, car 3 + 12 = 15 » ; ce faisant, on applique implicitement le théorème « une unité étant choisie, la somme des mesures de deux masses est égale à la mesure de la somme des deux masses »…

Le danger, pour nos élèves, est de tout mélanger et de produire des écritures incorrectes, relativement courantes, du genre « 3 + 12 = 15 kg » ou même « la masse de … est 3 + 12 = 15 kg »[9]. C'est peut-être pour éviter ce genre d'erreurs que des enseignants préfèrent dire à leurs élèves : « jamais d'unités dans les calculs ».

Lorsqu'on désigne des grandeurs par des lettres, et qu'on est amené à écrire des calculs faisant intervenir à la fois ces lettres et des nombres (par exemple lors de résolutions d'équations), si on omet les unités, c'est généralement pour éviter une certaine lourdeur, surtout si les calculs sont longs. Mais c'est au détriment d'une certaine rigueur ; par exemple, si on note t un temps (une durée), et v une vitesse, on commet une erreur quand on écrit $v \times t = 80$, puisque le produit d'une durée par une vitesse est une longueur, pas un nombre.

On peut contourner cette difficulté en décidant que les lettres désignent les *mesures* des grandeurs en question ; mais cela oblige à choisir chaque fois une unité (et à la préciser), et à s'assurer que les unités choisies sont cohérentes (si on multiplie une mesure en km/h par une mesure en min, on n'obtiendra pas la mesure de la longueur-produit en km).

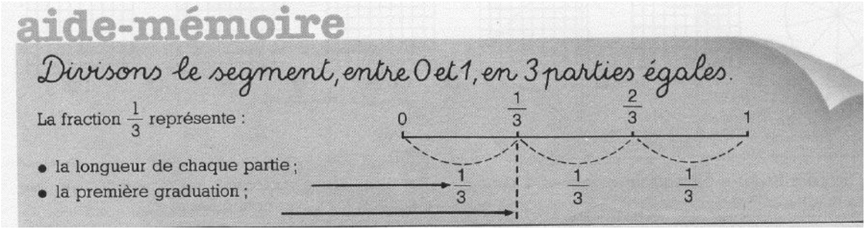
Le cas des longueurs est particulier : il s'agit de se mettre d'accord sur la notation AB (A et B étant deux points) : représente-t-elle une distance ? Mais alors comment définit-on (pour nos élèves) une distance dans le plan, par exemple si on n'a pas de repère ? Représente-t-elle une mesure de longueur ? Si oui, choisit-on toujours, et partout, la même unité ? On pourrait évidemment employer une notation du genre $\text{mes}_{\text{cm}}(\text{AB})$, mais on retrouve la lourdeur à laquelle on voulait échapper… Si, comme cela semble être majoritairement le cas, AB représente une longueur, alors il faut être conscient de tous les abus d'écriture que l'on commet lorsqu'on applique le théorème de Thalès, celui de Pythagore, ou encore les propriétés trigonométriques ; l'écriture $\text{AB} = \text{AC} \times \cos(...)$ est correcte ; par contre $\text{AB} = 7 \times 0{,}5$ ne l'est plus… Doit-on alors s'étonner que des élèves finissent par exprimer un cosinus en cm, par exemple ? Quant au théorème de Pythagore, il fait, lui, intervenir des aires : quand on écrit $\text{ST}^2 = \text{RS}^2 + \text{RT}^2$, et si par exemple RS = 7 cm et RT = 9 cm, alors on devrait ensuite écrire $\text{ST}^2 = 49\ \text{cm}^2 + 81\ \text{cm}^2$ et pas $\text{ST}^2 = 49 + 81$; mais cela choque certains…

En résumé : on peut se passer des symboles d'unités dans les calculs à propos des grandeurs, au prix de quelques abus (sans doute acceptables dans les grandes classes), et on y gagne en rapidité de rédaction. Examinons maintenant ce qui plaide pour maintenir la présence de ces unités.

(9) En outre, cela se lirait « la masse de … est trois plus douze est égal à 15 kilogrammes », ce qui est grammaticalement incorrect ; beaucoup d'élèves oublient que le signe « = » est une locution verbale.

Et pourquoi mettre les unités dans les calculs ?

Parmi les arguments, citons en premier lieu l'importance, à mon avis, d'amener les élèves à bien saisir la distinction entre grandeurs et nombres. Et l'aspect formel (des écritures correctes, en particulier) y contribue pour une large part. Illustrons par un exemple, extrait d'un manuel de CM2(10), l'ambiguïté entre nombre et grandeur :



|On remarque que le nombre $\frac{1}{3}$, écrit sous cette forme, apparaît sous deux statuts différents : celui de « représentant d'une longueur » et celui de « représentant d'une graduation » (je reprends le vocabulaire employé) ; dans le premier cas, cela correspond à la *longueur* du segment dessiné ; dans le second cas, cela correspond à un *nombre*, l'abscisse du point surmonté de la fraction $\frac{1}{3}$; mais sur un même schéma, la même écriture désigne deux choses différentes ; on peut s'attendre à une certaine confusion dans l'esprit des élèves ! Pourquoi ne pas écrire, sous le segment partiel, « $\frac{1}{3}$ de la longueur du segment » ou « $\frac{1}{3}$ de L » (L étant la longueur du segment complet) ?

Ce n'était qu'un exemple ; une étude didactique plus poussée reste à mener, qui nous renseignerait mieux sur les difficultés engendrées par ces mélanges de notions différentes.

Autre raison pour écrire les unités dans les calculs : cela permet de donner davantage de sens à la notion de multiplication externe (et d'éviter de la confondre avec la multiplication interne) ; écrire 2×5 kg montre bien qu'on parle d'une masse, *deux fois plus grande* qu'une autre masse. Dans le même ordre d'idées, le cosinus d'un angle apparaît mieux comme un nombre si on a l'habitude de le voir multiplié par une longueur écrite avec l'unité choisie.

Quant à la confusion entre les notions de périmètre et d'aire, courante chez nos élèves, on peut penser qu'elle serait atténuée si l'on systématisait la présence des unités dans les écritures ; on voit bien la différence entre « 9 cm × 4 » et « 9 cm × 4 cm » : l'un désigne une longueur (par exemple le périmètre d'un carré), alors que l'autre désigne une aire (par exemple celle d'un rectangle de dimensions 9 cm et 4 cm).

(10) « Objectif Calcul » ; éditions Hatier.

De même, si l'on veut aider à différencier les notions d'aire et de volume, on peut systématiser les écritures du type 52 cm^2 × 3 cm = 156 cm^3, à faire comparer avec 52 cm^2 × 3 = 156 cm^2 ou 52 cm^2 + 3 cm^2 = 55 cm^2…

Abordons maintenant le domaine de la proportionnalité ; nous savons bien que c'est une notion importante et riche, mais ardue. Une des difficultés qu'elle crée est la confusion entre l'opérateur « externe » et les opérateurs « internes » ; le premier (appelé coefficient de proportionnalité, ou opérateur fonctionnel, en référence à la fonction linéaire sous-jacente) est un opérateur de type multiplicatif (ou divisif) et permet de passer d'une *suite* à une autre ; les seconds (appelés quelquefois opérateurs scalaires, car ce sont toujours des nombres) sont aussi de type multiplicatif (ou divisif) et sont des rapports entre deux éléments différents d'une *même suite*, que l'on retrouve dans l'autre suite grâce à une propriété de la linéarité (à ne pas confondre avec une autre propriété de la linéarité, appelée quelquefois « additivité »).

Il s'agit de suites, mais pas forcément de *nombres*, comme on le mentionne en général dans les définitions de deux suites proportionnelles, parce que, justement, ce sont souvent des suites de *grandeurs* qui interviennent dans les situations de proportionnalité (surtout à l'école primaire et au collège) ; de plus, il s'agit assez couramment de suites de grandeurs de deux types différents (des masses et des prix, ou des longueurs et des durées, ...) ; et dans ce cas, « l'opérateur externe » n'est pas un nombre, mais une grandeur-quotient, comme dans la situation illustrée par le tableau suivant :

masse de poisson achetée	1,5 kg	6 kg	0,3 kg
prix payé	60 F	240 F	12 F

Traditionnellement, on dirait ici que le coefficient de proportionnalité est 40 (ou 0,025, suivant le sens du passage d'une ligne à l'autre) ; en fait, l'opérateur qui permet de passer de la première ligne à la deuxième est plutôt × 40 F/kg …, alors que l'opérateur multiplicatif qui permet de passer de la première colonne à la deuxième, par exemple, est × 4.

Ce qui amène tout naturellement à écrire 1,5 kg × 4 = 6 kg, bien sûr, mais aussi 1,5 kg × 40 F/kg = 60 F ; mais ce dernier type d'écriture est peu courant, et de nombreux enseignants hésitent à l'employer, parce que « cela complique les choses » ou « c'est trop difficile à comprendre pour les élèves » ; cela se discute effectivement (suivant le niveau de classe), mais il semble que peu d'études existent sur ce sujet ; ma modeste expérience me fait dire que « cela passe bien » auprès de la plupart des élèves, même en sixième.

De plus, fréquenter des écritures du type 1,5 kg × 40 F/kg = 60 F peut aider à comprendre la propriété classique « $a \times \frac{b}{a} = b$ (si $a \neq 0$) » ; de même les écritures du type 7 m × 3 m = 21 m^2 peut aider pour les calculs sur les puissances…

Plus généralement, cela prépare à la notion « d’équation aux dimensions », utilisée en sciences physiques, et qui permet de vérifier la cohérence d’une formule, en raisonnant uniquement sur les types de grandeurs ou les unités. Prenons un exemple interne à la géométrie : si un élève n’est pas bien sûr que la formule donnant le volume d’un cône de révolution est $\frac{1}{3} \neq R^2H$, il peut se dire : « comme R est le rayon, donc une longueur, R^2 est forcément une aire ; multiplié par H, qui est la hauteur, donc une longueur, cela donnera un volume ; ≠, bien qu’étant une lettre, désigne un nombre, et un volume multiplié par un nombre, cela reste un volume ; de même pour le produit par $\frac{1}{3}$; donc la formule en question est bien celle d’un volume » (bien entendu, cela ne prouve pas que c’est celle du volume du cône).

Pourquoi ne pas habituer nos élèves à ce genre de raisonnement ?