À propos de transformations

Projet de programme de TS pour la rentrée 2002

Commission Lycées de l'APMEP

La commission Lycées de l'APMEP s'est intéressée à la question de la place de la géométrie non analytique, et plus particulièrement de géométrie plane, dans les projets de programme de TS, ainsi qu'à la cohérence de l'enseignement de la géométrie depuis le collège. Nous présentons ici ses réflexions au sujet du projet de programme, dans la version de décembre 2000. Il est vrai que, par la suite, ce projet a été modifié et en particulier sur cette partie de programme. Cependant les idées fortes demeurent, c'est pourquoi nous vous les soumettons, en vous recommandant de vous reporter également au dossier Géométrie du Bulletin nº 430.

Extrait du projet de programme de terminale S, version décembre 2000. Objectifs et motivations. Géométrie

La géométrie étant objet d'enseignement depuis la maternelle, la partie géométrie du projet proposé doit être située dans le courant global d'apprentissage de la géométrie tout au long de la scolarité. Plus précisément, on cherche d'abord à ce que les élèves apprennent à voir dans l'espace, à saisir les situations spatiales. Cette capacité est importante par elle-même, et d'autre part elle est source d'intuitions dans tout le reste des mathématiques (cf. le rapport de géométrie de la commission de recherche sur l'enseignement des mathématiques[1], http://smf.emath.fr). Elle est peu dissociable d'une familiarité avec les représentations planes des situations spatiales.

On cherche ensuite à familiariser les élèves avec l'expression analytique de faits géométriques. Et par conséquent une part croissante de l'enseignement de la géométrie emprunte la voie analytique. Mais ceci ne devrait pas signifier que l'on accorde moins d'importance à l'intuition spatiale des propriétés géométriques et à leur représentation ; il ne faut pas enfermer la géométrie dans des formules qui, tout en constituant entre elles un système cohérent, ne retournent pas aux phénomènes spatiaux d'où elles viennent et qu'elles éclairent.

Enfin, un fil conducteur qui traverse tout l'apprentissage des mathématiques (et pas seulement de la géométrie) est celui de la linéarité. …/…

Dans ce cadre, le programme traite des relations barycentriques [les vecteurs à l'état pur, avec application aux problèmes d'équilibre], des intersections de droites et de plans [équations, relations, variétés linéaires], de quelques transformations du plan et de l'espace et leur composition, des produits scalaires et vectoriels [formes bilinéaires, moyens nouveaux pour situer et mesurer des objets géométriques : orthogonalité, angles, aires, etc.], les nombres complexes [expression originale des vecteurs du plan]. La linéarité sera aussi mise en relief par des contre-exemples : l'inversion par exemple, et aussi quelques exemples simples de fonctions non linéaires de deux variables. Ce dernier point (fonction de deux variables) semble en outre apporter beaucoup au développement de l'intuition spatiale, et a un avenir à plusieurs endroits dans l'enseignement supérieur.

(1) Connue aussi sous le sigle, ou du nom de son président : Commission KAHANE.

Contenu	Modalités de mise en œuvre	Commentaires
Transformations (affines) Réflexions dans l'espace. Composée de deux réflexions dans le plan puis dans l'espace. Rotation dans l'espace. Axe, angle.		Les similitudes sont mentionnées dans le paragraphe sur le plan complexe, mais l'enseignant est libre de l'articulation des chapitres.

Les réflexions de la Commission Lycées(2)

Quelques constats :

Par rapport aux programmes des classes précédentes, la géométrie apparaît bien amputée :

- Pour les transformations de l'espace (réflexions et rotations) il n'y a rien dans la colonne centrale « Modalités de mise en œuvre ».
- Mis à part la composée de deux réflexions, les transformations du plan n'apparaissent plus dans la colonne « Contenus ». Pourtant elles étaient annoncées dans le programme de Première S pour la TS.
- Pour le reste il s'agit presque exclusivement de géométrie analytique conforme à ce qui est annoncé dans la partie « Objectifs et motivations » : « une part croissante de l'enseignement de la géométrie emprunte la voie analytique ».
- L'inversion est citée comme contre-exemple à propos de la linéarité.
- Suppression de « l'émergence » de structure de groupe (en spécialité).

D'où quelques interrogations :

- Pour les transformations de l'espace (réflexions et rotations) doit-on s'en servir pour étudier des configurations ? des problèmes de lieux ? On ne sait trop puisque rien ne figure dans la colonne centrale « Modalités de mise en œuvre »…
- Que fait-on des transformations étudiées en Collège, utilisées en Seconde (« pour argumenter à l'aide de leurs propriétés ») ainsi que du travail effectué en Première, notamment sur la recherche de lieux géométriques ?
- Les similitudes ne sont vues que dans le plan complexe et en spécialité seulement sans qu'aucun lien apparemment ne soit fait avec les triangles semblables mis en place en Seconde (voir ci-après l'exemple sur les similitudes).
- Quelle place et quel développement pour l'inversion ? Il ne suffira pas de la « citer »…

Observations et propositions :

Première observation : on ne perçoit guère pour cette partie concernant les transformations la cohérence annoncée avec les classes antérieures.

À moins de partir du principe que les savoirs géométriques sont suffisamment maîtrisés à la fin de la Première S, la suppression apparente du travail sur les

(2) Ce texte a été envoyé par R. Bellœil, président, au Groupe en charge des programmes, début mai.

transformations planes et la structure de groupe en spécialité ne semble pas motivée par autre chose que de ne pas « charger la barque » pour faire de la place… ou pour privilégier le « fil conducteur » de la linéarité pour le post-bac… ce qui pose alors la question de la pertinence de ce choix s'il ne l'est que pour ce motif.
Si les transformations deviennent « anecdotiques » en Terminales, elles risquent de perdre beaucoup de leur intérêt dans les classes antérieures et se voir délaissées. C'est alors à se demander s'il faut les maintenir vu l'investissement que cela demande de la part des enseignants et des élèves d'autant que ce manque de continuité sur les trois années du lycée, concernant les transformations, n'est pas en cohérence avec les objectifs annoncés.

Une autre option serait de les mettre explicitement au programme de Terminale en conservant l'objectif de Première, c'est à dire de « *consacrer la plus grande partie du temps au traitement d'exercices et de problèmes permettant de mettre en œuvre toutes les transformations utilisées durant le secondaire, en particulier dans la recherche de lieux géométriques* ».
D'une part, cela serait cohérent avec les commentaires accompagnant les programmes comme celui-ci extrait du programme de Première S : « *On peut observer que certaines réciproques ne s'imposent pas aux yeux de la plupart des élèves. Peut-être vaut-il mieux y revenir plus tard lorsque certaines recherches de lieux géométriques auront montré le caractère indispensable de cette réciproque* ». C'est quand « *plus tard* » ?
D'autre part, cela permettrait à n'en pas douter de *s'appuyer davantage sur le caractère bijectif des transformations ou sur une démarche d'analyse-synthèse* qui est suggérée en Première mais qui risque fort de n'être pas effective à ce niveau. Sans compter que nos collègues du supérieur sont les premiers à regretter ce manque de pratique des notions de bijection et de réciproque.
Plutôt qu'une succession de connaissances nouvelles à « acquérir » au cours des deux ans en série S (et, si ce projet ne devait pas être modifié, sur un an pour celle « entrevue » en TS, comme le produit vectoriel, par exemple), cela donnerait l'occasion à nos élèves d'une meilleure assimilation dans la durée et de profiter ainsi des avancées qu'ils auront accomplies en les mettant davantage en situation de réussite.
Cela irait dans le sens de la rupture souhaitée par les professeurs avec cette impression d'une vraie course d'obstacles où il faut sans répit introduire des notions nouvelles, conceptuellement difficiles sans pouvoir donner le temps ou l'occasion aux élèves de les « digérer »… et crédibiliserait un peu plus la nécessaire *durée de fréquentation* d'une notion avant son acquisition ! Vu le manque chronique de temps dont nous disposons pour réinvestir des connaissances et le fait que les sujets actuels du baccalauréat ne plaident guère pour ce type de travail, ce serait donc un signe de plus allant dans le sens de la lettre de cadrage de décembre du CNP(3) et de la DESCO(4) concernant l'évaluation…

Deuxième observation : les interrogations précédemment soulevées à la lecture de cette partie font apparaître un manque de précision avec le danger, si l'on rentre dans le détail, de voir apparaître une grande quantité de travail pour qui veut traiter ces questions sérieusement.

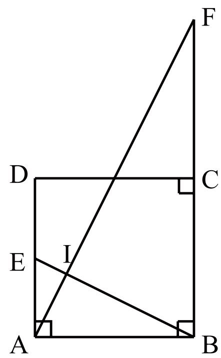
Troisième observation : ce projet risque fort de renforcer une vision des mathématiques très calculatoire : on applique, on calcule et ce même en géométrie ! On peut cependant se poser la question : « *Faire de la géométrie est-ce seulement traduire un problème et le résoudre dans un repère ou dans le plan complexe ?* »

La spécialité :

Le fait d'avoir recentré il y a peu l'enseignement de spécialité sur deux domaines, arithmétique et étude de transformations planes avec émergence de la structure de groupe a permis à l'enseignement de spécialité de trouver sa propre cohérence en offrant des champs dans lesquels les élèves peuvent exercer leur raisonnement, leur initiative, et où de réelles démonstrations de cours sont possibles. Il donne satisfaction en terme de formation et justifie l'existence d'une spécialité math. Ce n'est pas à négliger alors qu'en ce moment elle semble à nouveau remise en cause par nos amis physiciens notamment, alors que ceux-ci sont satisfaits du contenu actuel car non indispensable à la poursuite des études en Physique et SVT…
Il ne faudrait donc pas perdre ce qui a été perçu par tous comme une avancée positive. C'est pourquoi il ne nous paraît pas souhaitable de trop « toucher » la spécialité math.

Sur un exemple relatif aux similitudes nous proposons plusieurs démonstrations possibles, suivant les théorèmes dont disposent les élèves, suivant le type de géométrie enseignée, et donc le type de formation qu'on souhaite pour nos élèves.

Sur la figure ci-contre, le quadrilatère ABCD est un carré, le point E est le milieu du segment [AD] et le point C le milieu du segment [BF].
Après avoir justifié l'existence d'une similitude plane directe transformant le triangle ABE en le triangle ABF, déterminer le centre de cette similitude.



➯ Proposition : mettre « au programme » qu'étant donnés quatre points A, B, A′, B′, tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une similitude plane directe et une seule qui transforme A en A′ et B en B′.
Cela peut se démontrer éventuellement en utilisant les nombres complexes. Partant de là, il existe donc une similitude **S** et une seule qui transforme A en B et B en F.

N'est-il pas anormal, dans le cadre d'une formation à la démarche scientifique, de ne plus pouvoir demander aux élèves une telle justification ?

Avec ce projet de programme :

Immédiatement on obtient que le rapport est égal à $\dfrac{BF}{AB} = 2$ et l'angle

(3) Conseil National des Programmes
(4) Direction de l'Enseignement Scolaire, au Ministère de l'Éducation Nationale.

$\theta = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BF}\right) = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$. En notant E′ l'image de E par **S**, des propriétés d'une similitude plane directe, on en déduit que :

$$BE' = 2AE \text{ et } \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\right) = \left(\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BE'}\right).$$

D'où l'on peut déduire que E′ = A.
Pour déterminer son centre, on peut alors se placer dans un repère orthonormé et déterminer l'écriture complexe de **S**, etc.

On peut aussi envisager un autre scénario :

En justifiant que les triangles ABE et ABF sont des triangles rectangles directement semblables (comme on a appris à le faire en Seconde…) ou en faisant référence au fait, par exemple, qu'en faisant « pivoter » ABE de 90° puis en lui « faisant subir » une homothétie de rapport 2, il est possible d'obtenir ABF… Ensuite, après avoir justifié l'orthogonalité des droites (AF) et (EB), que BI = 2AI = 4IE, etc., il y a alors pas mal de triangles rectangles directement semblables par **S** comme AEI, ABI et BFI sur cette figure pour en déduire que I a pour image lui-même…

C'est ce que Jean-Pierre Kahane appelle le « senti » en mathématiques…

Faire sentir les choses en mathématiques ! Pourquoi se refuser ce plaisir et ne pas le faire partager à nos élèves ?

Et dans le projet de programme version juin 2001 ?

Signalons que ce projet a été approuvé par le Conseil Supérieur de l'Education le 7 juillet, et qu'à l'heure où ce Bulletin sera publié le programme – il ne sera alors plus question de projet – aura peut-être été publié au Bulletin Officiel.

Dans la colonne « Contenu », la géométrie n'apparaît plus que par l'intermédiaire des nombres complexes.

Extrait du projet de programme, version juin 2001 :

Préambule du paragraphe Géométrie :

L'objectif de ce paragraphe est d'entretenir la pratique des objets usuels du plan et de l'espace et de fournir quelques notions nouvelles permettant de parfaire l'approche entreprise dans les classes antérieures sur la géométrie vectorielle ou repérée. Dans le prolongement du repérage polaire introduit en première, les nombres complexes, outre leur intérêt historique, algébrique et interdisciplinaire pour la poursuite des études, fournissent un outil efficace dans les problèmes faisant intervenir les transformations planes. L'extension à l'espace du produit scalaire permet de résoudre de nouveaux problèmes et, de ce fait, d'approfondir la vision de l'espace.
Bien que, comme dans les programmes antérieurs, le libellé de cette partie soit relativement concis, on prendra le temps de mettre en œuvre toutes les connaissance de géométrie de l'ensemble du cursus scolaire pour l'étude de configurations du plan ou de l'espace, le calcul de distances, d'angles, d'aires et de volumes, etc. Ces travaux seront répartis tout au long de l'année afin que les élèves acquièrent une certaine familiarité avec le domaine géométrique ; on privilégiera les problèmes dont les procédés de résolution peuvent avoir valeur de méthode et on entraînera les élèves à choisir l'outil de résolution le plus pertinent parmi ceux dont ils disposent (propriétés des configurations, calcul vectoriel, calcul barycentrique, transformations, nombres complexes, géométrie analytique).

Dans la colonne **Modalités de mise en œuvre**, on lit :
On utilisera les nombres complexes pour traiter des exemples simples de configurations et résoudre des problèmes faisant intervenir des translations, des rotations, des homothéties.

Et dans la colonne **Commentaires :**
On exploitera à la fois les possibilités offertes par les nombres complexes et les raisonnements géométriques directs.

Nos réflexions :

Que pensons-nous de cette nouvelle version, et de l'enseignement de la géométrie qu'elle implique ? Tout d'abord, en deux lignes courtes, la colonne Commentaires peut amener à de longs développements, et laisse supposer que les transformations auront été étudiées de façon approfondie en Première, et que cela sera bien maîtrisé par les élèves.
En ce qui concerne l'espace, le produit vectoriel est supprimé, et les barycentres, mais il faudra en parler pour caractériser les droites, plans, segments, triangles.
En somme les aspects calculatoires de la géométrie sont nettement privilégiés et les occasions de démonstration réduites.

On pourra nous objecter que l'APMEP a toujours demandé que « des pans entiers » de programme soient supprimés pour que nous puissions faire travailler réellement les élèves sur des contenus moindres, mais en approfondissant davantage, et en donnant aux élèves le temps de chercher, ce qui est bien une des compétences essentielles en mathématiques. A ce titre, il est donc plus que regrettable que les propositions argumentées de l'APMEP en faveur de la présence explicite des transformations au programme de TS (cf. « Une autre option » en page 3 de cet article) n'aient pas été prises en considération.

L'APMEP s'interroge donc d'une part sur la cohérence avec les programmes de Seconde et de Première Scientifique (voir en annexe les parties de programme correspondantes) et d'autre part sur le sens de petites phrases comme « on exploitera à la fois les possibilités offertes par les nombres complexes et les raisonnements géométriques directs » qui laissent la porte ouverte à toutes les interprétations et risquent, une fois de plus, de favoriser le pilotage de l'enseignement par les sujets de bac…

Annexe

Programme de Seconde (rentrée 2000)

Objectifs :

Deux objectifs principaux sont assignés à cette partie du programme :
– développer la vision dans l'espace ;
– proposer aux élèves des problèmes utilisant pleinement les acquis de connaissances et de méthodes faits au collège ; pour dynamiser la synthèse et éviter les révisions systématiques, trois éclairages nouveaux sont proposés : les triangles isométriques, les triangles de même forme et des problèmes d'aires ;

Le calcul vectoriel et analytique est limité au minimum : entretien des acquis du collège ; utilisation en physique. Aucune notion nouvelle sur les transformations n'est envisagée. On utilisera les possibilités qu'offrent les logiciels de géométrie.

Les configurations du plan **Triangles isométriques** **Triangles de même forme**	Utiliser, pour résoudre des problèmes, les configurations et les transformations étudiées en collège, en argumentant à l'aide de propriétés identifiées. Reconnaître des triangles isométriques. Reconnaître des triangles de même forme. Résoudre des problèmes mettant en jeu formes et aires.	Les problèmes seront choisis de façon : – à inciter à la diversité des points de vue, dans un cadre théorique volontairement limité, – à poursuivre l'apprentissage d'une démarche déductive, – à conduire à la maîtrise d'un vocabulaire logique adapté (implication, équivalence, réciproque). …/…

Document d'accompagnement (Géométrie) :

Pour toute la partie géométrie, le programme donne deux orientations fondamentales :
– prendre du temps pour s'adonner à une vraie recherche de problèmes – en respectant toutes les étapes relatives à ce type de recherche (conjectures et expérimentations, recherche de preuves, mise en forme d'une démonstration) – ;
– s'appuyer sur des notions fortement liées à la perception (forme, taille, aire, ...) pour progresser dans la maîtrise des savoirs géométriques.

Le programme de Seconde a donc limité le nombre de notions nouvelles à introduire et propose de s'appuyer avant tout sur les acquis de collège…

Les configurations du plan

…/…
La définition générale d'une isométrie n'est pas un acquis de collège, elle n'est en aucun cas un objectif de la classe de Seconde ; cela n'empêche pas l'utilisation du qualificatif *isométrique* ou de l'expression *cas d'isométrie* ; …/…
Par contre, entre les termes *triangles de même forme ou triangles semblables*, le programme laisse à chaque enseignant la liberté de choisir le terme préféré ; il conviendra néanmoins que les élèves sachent leur synonymie.
…/…
L'intention est claire : il s'agit avant tout de faire réfléchir et travailler les élèves sur des problèmes réinvestissant la totalité des acquis antérieurs (configurations, transformations, vecteurs). Ce sera l'occasion de s'attarder sur l'apprentissage d'une démarche déductive et la maîtrise d'un vocabulaire logique…

Programme de Première S (rentrée 2001)

L'étude de configurations du plan et de l'espace est une partie importante du programme : étude statique à l'aide du calcul vectoriel ou de la géométrie analytique, étude dynamique à l'aide des transformations.
Enfin la géométrie élémentaire est une école de pensée : on veillera à allier observations (à l'aide de logiciels de géométrie dynamique notamment) et mise en évidence des démarches et des propriétés des objets étudiés permettant de confirmer ou d'infirmer ces observations ; on prendra soin aussi de construire des îlot déductifs consistants et d'aborder divers types de raisonnements formateurs; on incitera à la réflexion sur différents niveaux d'explicitation d'une démonstration.
L'usage des logiciels de géométrie oblige à bien repérer ce qu'on choisit de démontrer : faire un tel choix et l'expliciter est un élément important d'une formation scientifique.

Transformations Translations et homothéties dans le plan et l'espace : définitions ; image d'un couple de points ; effet sur l'alignement, le barycentre, les angles orientés, les longueurs, les aires et les volumes ; image d'une figure (segment, droite, cercle).	Toutes les transformations connues seront utilisées dans l'étude des configurations, pour la détermination de lieux géométriques et dans la recherche de problèmes de construction, en particulier au travers des logiciels de géométrie.	Les transformations planes abordées en collège (translation, symétrie axiale, rotation) n'ont pas à faire l'objet d'un chapitre particulier.
Lieux géométriques dans le plan	Les logiciels de géométrie dynamique seront utilisés pour visualiser certains lieux. On choisira quelques exemples mettant en évidence la diversité des méthodes de recherche (propriétés des configurations, vecteurs, produit scalaire, transformations, géométrie analytique). On veillera à traiter des cas nécessitant de démontrer une double inclusion.	La problématique des lieux géométriques sera présente dans tous les paragraphes de géométrie. Elle ne fera pas l'objet d'un chapitre indépendant. Il s'agit de ne pas s'en tenir à une simple observation mais de mobiliser les connaissances pour établir mathématiquement diverses caractéristiques géométriques. On s'appuiera, le cas échéant, sur le caractère bijectif des transformations ou sur une démarche d'analyse-synthèse.

Annexe : les grandes lignes de Terminale S (spécialité comprise)

– *les nombres complexes ;*
– *transformations du plan (composition ; isométries, homographies, inversion) ;*
– *géométrie dans l'espace (perception de l'espace à travers quelques objets nouveaux, étude de transformations élémentaires, produit scalaire) ;*

Document d'accompagnement : Transformations

…/… On peut observer, à ce propos, que certaines réciproques (par exemple pour montrer que l'image d'une droite est une droite) ne s'imposent pas aux yeux de la plupart des élèves : peut-être vaut-il mieux y revenir plus tard lorsque certaines recherches de lieux géométriques auront montré le caractère indispensable de cette réciproque.
…/… On pourra néanmoins utiliser quelques exemples de composée : la notation o est en effet introduite en analyse, mais il ne s'agira que d'une sensibilisation. On soulignera le caractère bijectif des homothéties et des translations et on présentera la transformation réciproque.
Là aussi la plus grande partie du temps sera consacrée au traitement d'exercices et de problèmes. Le programme demande que les transformations (toutes celles utilisées auparavant y compris) soient mises en œuvre en particulier dans la recherche de lieux géométriques.

Début de Bibliographie… :

• Travaux Pratiques en Premières Scientifiques, IREM de Strasbourg – 1986
• Travaux Pratiques en Terminales Scientifiques, IREM de Strasbourg – 1987