

Olympiades de Mathématiques

NDIR. Il s'agit ici du point de vue de François Lo Jacomo, responsable de la rubrique « Les problèmes de l'APMEP ». Voir la position officielle de l'APMEP dans le BGV n° 99, janvier 2001, p. 2.

La 42^e Olympiade Internationale de Mathématiques vient de se dérouler, du 1^{er} au 14 juillet 2001 (épreuves les 8 et 9 juillet), à Washington (U.S.A.). Les efforts d'Animath pour mieux sélectionner et mieux préparer les élèves commencent à porter leurs fruits, et tout nous incite à les accentuer : d'une part, avec deux médailles d'argent et trois médailles de bronze, la France se situe au dessus de la moyenne mondiale, 28^e sur 83 avec 88 / 252, ce qui est nettement meilleur que l'an passé (où nous étions 48^e sur 81 avec 58 / 252). D'autre part, une fois encore, les élèves ayant suivi la préparation d'Animath ont été manifestement avantagés par rapport au seul de nos six candidats qui n'avait pas suivi cette préparation, bien que celui-ci soit premier prix du Concours Général.

De fait, quand on regarde la difficulté des problèmes posés (ils étaient encore plus difficiles cette année que l'an passé), on comprend qu'il est indécent d'envoyer à cette compétition des élèves non préparés, quel que soit leur niveau scolaire. Certains d'entre vous ont reproché aux Olympiades Académiques créées cette année d'avoir choisi des énoncés trop difficiles, mais un des buts de cette Olympiade Académique était d'aider au repérage de candidats susceptibles de représenter la France aux Olympiades Internationales. Vous aussi, vous pouvez nous y aider, en nous recommandant suffisamment tôt ceux de vos élèves particulièrement motivés pour ce genre de compétition, qui pourraient tirer profit de la préparation que donne le club France (stages, tutorat) et, éventuellement, représenter la France aux Olympiades Internationales (recommandations à envoyer à mon adresse).

Nous avons encore beaucoup à faire, en effet, pour améliorer le repérage des élèves dès le début du lycée, voire, dans un proche avenir, dès le collège, et améliorer leur préparation. Il ne s'agit pas de promouvoir une politique élitiste, mais seulement de placer les candidats français dans des conditions équitables de compétition en leur offrant une préparation comparable à celle des pays comparables. Sans cela, mieux vaut renoncer à la compétition et se replier sur soi, ce qui, vraisemblablement, n'apporterait rien de positif à l'enseignement des mathématiques en général.

Maintenant, pour tous ceux qui n'ont pas encore consulté les sujets d'Olympiades sur Internet (ils étaient sur le site d'Animath, <http://animath.free.fr>, le soir même de l'épreuve, et le site officiel de la compétition : <http://imo.wolfram.com> mérite lui aussi d'être visité), voici les sujets de cette 42-ème Olympiade :

42^e Olympiade Internationale de Mathématiques Washington (U.S.A.), 01 - 14 juillet 2001

Problème 1

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et dont O est le centre du cercle circonscrit. Soit P le pied de la hauteur abaissée de A sur BC. On suppose que $\angle BCA \geq \angle ABC + 30^\circ$.

Montrer que $\angle CAB + \angle COP > 90^\circ$.

Problème 2

Montrer que pour tous réels strictement positifs a , b et c , on a :

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1.$$

Problème 3

Vingt-et-une filles et vingt-et-un garçons ont participé à une compétition mathématique.

- chaque participant a résolu au plus six problèmes ;
- pour chaque fille et chaque garçon, un même problème, au moins, a été résolu par chacun d'eux.

Montrer qu'il y a un même problème, au moins, qui a été résolu par au moins trois filles et trois garçons.

Problème 4

Soit n un entier impair strictement supérieur à 1 et k_1, k_2, \dots, k_n des entiers donnés. Pour chacune des $n!$ permutations $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, on pose :

$$S(a) = \sum_{i=1}^n k_i a_i.$$

Montrer qu'il existe deux permutations b et c distinctes telles que $n!$ divise $S(b) - S(c)$.

Problème 5

Dans un triangle ABC, la bissectrice de l'angle BAC rencontre BC en P et la bissectrice de l'angle ABC rencontre CA en Q. On sait que l'angle BAC a pour valeur 60° et que $AB + BP = AQ + QB$. Quelles sont les valeurs possibles des angles du triangle ABC ?

Problème 6

Soit a, b, c, d des entiers tels que $a > b > c > d > 0$. On suppose que :

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Montrer que $ab + cd$ n'est pas un nombre premier.

Et voici mes traditionnelles statistiques pour 2001, comparées à celles (que nous n'avons pas encore publiées) pour l'an passé :

statistiques 2001, exercice par exercice

International				France		
moy	7/7	0/7	pb n°	moy	7/7	0/7
3,6	37%	28%	1	5,3	3/6	0/6
1,6	16%	65%	2	1,2	1/6	5/6
0,9	4%	58%	3	1,7	1/6	2/6
3,2	36%	31%	4	2,5	0/6	0/6
2,7	17%	20%	5	2,8	0/6	0/6
0,8	5%	80%	6	1,2	0/6	3/6

statistiques 2000, exercice par exercice

International				France		
moy	7/7	0/7	pb n°	moy	7/7	0/7
4,1	48%	26%	1	3,3	2/6	3/6
2,8	24%	11%	2	2,0	1/6	0/6
0,7	3%	73%	3	0,3	0/6	4/6
3,2	18%	18%	4	2,3	0/6	0/6
1,6	15%	56%	5	1,0	0/6	1/6
1,0	7%	73%	6	0,7	0/6	4/6

... et j'en profite pour remercier les 16 lecteurs : Mohammed AASSILA (67-Strasbourg), Pierre BORNSZTEIN (95-Courdimanche), Gaston BOUEZ (75-Paris), Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), Christophe BRIGHI (57-Thionville), Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), Edgard DELPLANCHE (94-Créteil), Gérard GOUBY (41-Romorantin), René MANZONI (76-Le Havre), Annette MOLARD (67-Strasbourg), Charles NOTARI (31-Montaut), Moubinool OMARJEE (75-Paris), Maurice PERROT (75-Paris), Raymond RAYNAUD (04-Digne), Mihail STOENESCU (67-Strasbourg), et un lecteur anonyme, de m'avoir fait parvenir 45 solutions de l'Olympiade 2000 (13 du problème 1, 12 du problème 2, 5 du problème 3, 5 du problème 4, 7 du problème 5 et 8 du problème 6), dont je vais rendre compte succinctement ci-dessous.

41^e Olympiade Internationale de Mathématiques Séoul-Taejon (Corée), 13 - 25 juillet 2000

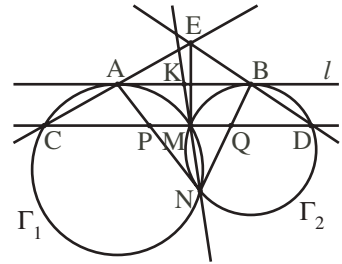
Problème 1

Deux cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en M et N. Soit l la tangente commune à Γ_1 et Γ_2 telle que M soit plus proche de l que N. La droite l est tangente à Γ_1 en A et à Γ_2 en B. La droite passant par M et parallèle à l rencontre à nouveau le cercle Γ_1 en C et le cercle Γ_2 en D. Les droites CA et DB se coupent en E ; les droites AN et CD se coupent en P ; les droites BN et CD se coupent en Q.

Montrer que $EP = EQ$.

Solution

Sous une figure faussement compliquée, ce problème est facile, un de nos candidats a avoué qu'il n'a pas osé l'aborder, se sentant insuffisamment préparé en géométrie, alors qu'après coup le problème lui a semblé très simple.



(MN), axe radical des deux cercles, coupe (AB) en son milieu K :

$$KA^2 = KM \cdot KN = KB^2.$$

Donc M est le milieu de PQ, puisque (PQ) est parallèle à (AB).

Par ailleurs, les angles (AE,AB) et (AB,AM) sont égaux car ils interceptent des arcs égaux, donc le symétrique de M par rapport à (AB) appartient à (AC). Pour la même raison, il appartient aussi à (BD) : E est le symétrique de M par rapport à (AB), donc (EM) est perpendiculaire à (AB) et à (PQ), (EM) est la médiatrice de PQ, d'où :

$$EP = EQ.$$

Signalons que les auteurs du problème avaient ajouté une autre question : montrer que NE est la bissectrice de l'angle CND.

Problème 2

Soit a, b, c trois nombres réels strictement positifs vérifiant $abc = 1$. Montrer que :

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leq 1.$$

Solution de Christophe BRIGHI

On note p le réel $\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right) \left(b - 1 + \frac{1}{c}\right) \left(c - 1 + \frac{1}{a}\right)$.

Supposons que l'un des trois facteurs de p soit négatif : si par exemple

$a - 1 + \frac{1}{b} \leq 0$, alors $a \leq 1$ et $\frac{1}{b} \leq 1$, donc $b \geq 1$ et $\frac{1}{a} \geq 1$, et donc les deux autres

facteurs sont positifs. On en déduit : $p \leq 0$, et donc $p \leq 1$.

Dans le cas contraire, on raisonne ainsi :

d'une part, $p = a(1 - bc + c)b(1 - ca + a)c(1 - ab + b)$,

d'autre part, $p = \frac{1}{b}(ab - b + 1) \cdot \frac{1}{c}(bc - c + 1) \cdot \frac{1}{a}(ca - a + 1)$,

d'où : $p^2 = \left[1 - (bc - c)^2\right] \left[1 - (ca - a)^2\right] \left[1 - (ab - b)^2\right]$.

p^2 est donc le produit de trois réels compris entre 0 et 1.

Donc $p^2 \leq 1$, et donc $p \leq 1$.

Signalons que, sur ce problème, un de nos candidats a fait appel à une inégalité plus ou moins classique qu'il connaissait, mais dont il avait oublié le nom. En pareil cas, le doute joue traditionnellement en faveur du candidat, dont la solution a été acceptée en totalité : n'importe quel théorème considéré comme classique peut être utilisé pour un problème d'Olympiade, sans qu'il soit nécessaire de le redémontrer.

Problème 3

Soit $n \geq 2$ un entier. Au début, il y a n puces sur une droite horizontale, pas toutes au même point. Pour un nombre réel strictement positif λ , on définit un mouvement de la manière suivante :

- on choisit deux puces situées aux points A et B, avec A à gauche de B,
- alors, la puce en A saute au point C, situé sur la même droite, à droite de B, et tel

$$\text{que } \frac{BC}{AB} = \lambda$$

Trouver toutes les valeurs de λ telles que, pour tout point M sur la droite et pour toutes positions initiales des n puces, il existe une suite finie de mouvements qui amène toutes les puces à droite de M.

Solution

C'était manifestement le plus difficile et le plus intéressant des six problèmes, bien que certains lecteur l'aient trouvé fastidieux.

La première étape consiste à séparer toutes les puces car, certes, elles ne sont pas toutes au même point, mais plusieurs d'entre elles peuvent être confondues. On fait sauter la puce (ou l'une des puces) la plus à gauche par dessus la puce (ou l'une des puces) la plus à droite, et on réitère ce procédé n fois : à chaque fois, la puce qui vient de sauter occupe une place strictement plus à droite que toutes les autres, si bien qu'après avoir fait sauter ainsi toutes les puces, elles seront toutes en des points distincts. On appellera alors ε_0 (> 0) la plus petite distance entre deux puces consécutives, w_0 et x_0 les abscisses de la puce la plus à gauche et la plus à droite respectivement.

Puis, on réitérera ce procédé, en appelant ε_k , w_k et x_k respectivement la plus petite distance de deux puces consécutives, l'abscisse de la puce la plus à gauche et

l'abscisse de la puce la plus à droite, après k nouveaux sauts. Si $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$, ε_k ne peut que croître, car $x_k - w_k \geq (n-1)\varepsilon_k$, et la puce en w_k vient en

$$x_{k+1} = x_k + \lambda(x_k - w_k) \geq x_k + \varepsilon_k.$$

En outre, $w_{k+1} \geq w_k + \varepsilon_k$: il en résulte que $w_k \geq w_0 + k\varepsilon_0$, et donc que pour tout point M, d'abscisse z , il existe k tel que $w_k > z$, ce qui signifie que toutes les puces sont à

droite de M. Toutes les valeurs de $\lambda \geq \frac{1}{n-1}$ répondent donc à la question.

Mais qu'en est-il lorsque $\lambda < \frac{1}{n-1}$? Il faut montrer que ces valeurs ne conviennent

pas, et c'est plus délicat. Pour cela, il faut définir une fonction de k qui décroisse quel que soit le saut choisi, et qui permette de majorer x_k . w_k et x_k restent définis comme ci-dessus, si ce n'est que les sauts ne sont plus ceux imposés dans la première partie de la démonstration, en particulier on ne peut plus rien dire de ε_k dans ce cas général. Appelons S_k la somme des abscisses des n puces, et $F_k = (1 + \lambda)x_k - \lambda S_k$. Si le $k+1$ -ème saut consiste à faire passer la puce en a_k par dessus la puce en b_k pour l'amener en c_k , $c_k - b_k = \lambda(b_k - a_k)$ par hypothèse, donc

$$S_{k+1} = c_k + (S_k - a_k) = S_k + (1 + \lambda)(b_k - a_k).$$

D'autre part, x_{k+1} vaut soit x_k soit $c_k = b_k + \lambda(b_k - a_k) \leq x_k + \lambda(b_k - a_k)$. Dans les deux cas, on a bien $F_{k+1} \leq F_k$.

L'hypothèse $\lambda < \frac{1}{n-1}$ ne nous a pas encore servi ! Il faut introduire $\mu = 1 - (n-1)\lambda$, et constater que, comme $S_k < n x_k$, $F_k > \mu x_k$.

Or si $\lambda < \frac{1}{n-1}$, $\mu > 0$ donc : $x_k < \frac{F_k}{\mu} \leq \frac{F_0}{\mu}$, si bien que quelle que soit la suite des

sauts, même la puce la plus à droite n'atteindra jamais le point M d'abscisse $\frac{F_0}{\mu}$. Les

valeurs de $\lambda < \frac{1}{n-1}$ ne conviennent donc pas, ce qui achève la démonstration.