Enseignement insensé, enseignement raisonné et créativité sociale

Yves Chevallard(*)

1. Une question cruciale : les savoirs, pour quoi faire ?

1.1. Un symptôme de l'état de l'École

Le conflit entre « tenants de la pédagogie » et « défenseurs des savoirs » ne cesse aujourd'hui d'envenimer le débat sur l'École. Dans le *pire* des cas, on assiste, du côté des « pédagogues », à l'oubli, voire au rejet des savoirs établis ; du côté de ceux que j'appellerai les « savants », à l'opposé, on voit la sanctification, voire la fétichisation « du » savoir.

Contre l'oubli des savoirs, on doit d'abord rappeler le *pacte national d'instruction* que l'École met en œuvre : on va à l'École *pour s'instruire*, afin de pouvoir *analyser les situations du monde* et *agir* en leur sein *de façon raisonnée*.

Contre la sanctification du savoir, on doit ensuite rappeler la *fonction génératrice du savoir* partout dans la société : les savoirs sont l'outil permettant de créer des *réponses idoines et bien contrôlées* aux *questions vives* qui se posent à nous.

Dans chacun des deux cas – chez les « pédagogues » comme chez les « savants » –, il y a rupture du lien organique entre l'École et les *questions vives* qui se posent, parfois cruellement, aux jeunes générations au moment d'entrer dans la société.

Pourquoi, en dernier ressort, l'École doit-elle instruire les jeunes générations sur ces questions vitales ? Si ambiguë soit-elle, il n'est qu'une réponse à cette question : parce que l'étude collective de ces questions vitales, qui en permet l'identification, la formulation et la résolution même partielle, *concourt à faire la « vie bonne »* – même quand cette étude fait réfléchir sur le tragique de la vie.

1.2. Motiver les savoirs étudiés

Un savoir, établi ou naissant, n'a sa place à l'École que s'il contribue à construire des réponses aux questions sur lesquelles on entend instruire les jeunes générations – et, à travers elles, la société.

Aucun savoir n'a, à l'École, de place réservée pour l'éternité : tous doivent régulièrement – à l'échelle historique – faire la preuve de leur fécondité à propos des questions à étudier. Or c'est une telle preuve que doivent fournir aujourd'hui les savoirs mathématiques.

(*) Iufm d'Aix-Marseille, Marseille. Ce texte reprend l'essentiel d'une communication faite à Marseille le 9 juin 2000 dans le cadre du colloque Mathématiques sans frontières 2000.

2. Les raisons d'être : une question vitale

2.1. Mathématiques insensées ?

Les objets mathématiques scolaires sont aujourd'hui largement *immotivés* parce qu'ils apparaissent désormais comme de simples « choses », qui sont *là*, réalités incréées qu'il conviendrait de visiter docilement, sans se demander *pourquoi* elles sont là.

Ainsi visite-t-on, comme en un musée, les *droites*, qui sont *parallèles* ou *sécantes*, les *angles*, qui sont *rentrants* ou *saillants*, et puis *aigus*, *droits* ou *obtus*, les *triangles*, qui peuvent être *isocèles*, *équilatéraux*, *rectangles*, et dont *les hauteurs se coupent*, les *fonctions*, qui peuvent être *croissantes*, *décroissantes*, etc.

Or les objets mathématiques *ne sont pas un donné de la « Nature »*. Ce sont des *créations humaines*, qui ont leurs raisons d'être – y compris les entiers « naturels » dont Kronecker (Berlin, 1886) affirmait en une formule frappante(1) :

> *« Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk »*

Pourtant le vieillissement du curriculum tend à « pétrifier » les objets mathématiques : on conserve *l'organe* mais on a perdu *les fonctions* pour lesquelles ces organes furent un jour créés, ou pour lesquelles ils sont toujours là.

Volens nolens on impose ainsi aux jeunes générations un monde *apparemment immotivé*, dénué de sens – *insensé* –, où l'on donne à croire par exemple qu'il serait « naturel », « normal » de s'intéresser aux triangles ! Monde d'organes sans fonctions, sans raisons d'être, sans raison.

Tout à l'inverse, un enseignement raisonné doit rendre sensibles les raisons d'être des objets enseignés. Pourquoi par exemple s'intéresser aux triangles, ou aux angles ? Ne pourrait-on pas s'en passer ? Sur ces points, on laissera le lecteur répondre par lui-même, en se guidant sur les quatre petits exemples qui suivent.

2.2. Exemple 1 : histoire de graphes

Voici d'abord un exemple imaginaire : si l'on enseignait au secondaire les rudiments de la *théorie des graphes*, mettrait-on en avant l'organe (les graphes) ou les *fonctions* de l'organe ?

De manière raisonnée, un graphe est un « quelque chose » qui, comme tout objet mathématique, concourt *à résoudre certaines classes de problèmes*. L'important n'est pas d'abord ce qu'est, *structurellement*, un graphe, mais bien ce que c'est, *fonctionnellement*. L'article « Théorie des graphes » de l'*Encyclopædia Universalis* s'ouvre d'ailleurs par ces mots(2) :

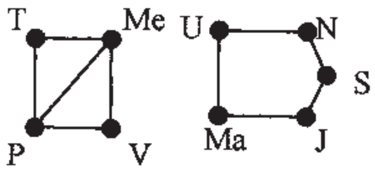
> « On appelle théorie des graphes *une classe de problèmes plus ou moins bien résolus*. Leur

(1) « Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme ». Les nombres non entiers étaient dits autrefois *artificiels* – par opposition aux nombres *naturels*.
(2) Hervé Raynaud, *Dictionnaire des mathématiques. Fondements, probabilités, applications*, Encyclopædia Universalis & Albin Michel, Paris, 1998, p. 225-234. C'est moi qui souligne.

> résolution suscite chez les mathématiciens, en particulier à l'étranger, un engouement sans cesse croissant. »

Un problème pour commençants – problème sur une *fiction* mais problème *bien réel* – permettra de mieux voir la chose[3] :

> « Nous sommes en 2951. Il existe un transport interplanétaire entre les planètes du système solaire. Des nefs spatiales assurent les liaisons suivantes : Terre-Mercure, Pluton-Vénus, Terre-Pluton, Pluton-Mercure, Mercure-Vénus, Uranus-Neptune, Neptune-Saturne, Saturne-Jupiter, Jupiter-Mars et Mars-Uranus. Ces liaisons permettent-elles de partir de la Terre et d'arriver sur Mars ? »



La clé du problème tient ici en un *graphe* – *mon premier graphe* si je débute dans le domaine. Établissons en effet le schéma des liaisons entre planètes (ci-contre). La réponse se lit sur le « graphe » obtenu : il n'est pas possible d'aller de la Terre jusqu'à Mars !

Voilà donc, sur un cas qu'on pourrait croire trop simple pour être vrai, l'*une* des raisons d'être des graphes. Voilà motivé l'intérêt pour les graphes.

2.3. Exemple 2 : le cas des radicaux

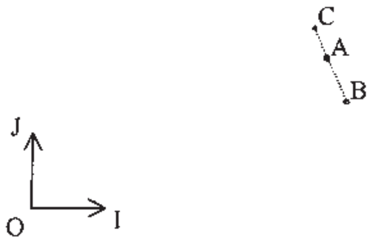
Pourquoi, maintenant, « chasser les radicaux » du dénominateur des fractions ? Pourquoi, ainsi, récrire l'expression $\dfrac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4}$ sous la forme $-1-\sqrt{2}$? Deux ou trois réponses *inadéquates* méritent d'être dénoncées :

> 1) « Parce que ! » ; 2) « Parce que c'est plus simple » ; 3) « Parce que c'est plus simple pour calculer, par exemple $\dfrac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4} = -1-\sqrt{2} \approx -2,414$ ».

Pour aborder la seule réponse qui vaille, commençons par un petit problème :

> « Dans un repère orthonormal, on considère les points A(4;2), B(3 $\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$), C(1+2 $\sqrt{2}$,1+\ $\sqrt{2}$). Ces points sont-ils alignés ? »

Il est bon d'attaquer ce problème par une *expérience graphique* : sur une feuille de papier, on place convenablement trois points O, I, J et, par rapport au repère qu'ils forment, on marque – approximativement – les points A, B, C.
Conclusion : l'alignement est vraisemblable !



Pour le prouver, calculons les pentes des droites (AB) et (AC) : les points sont alignés si et seulement si ces pentes sont égales. Or on obtient :

3 Cet exemple est emprunté au numéro 1 de la revue Diagonale (1999).

$$\mathrm{p}_{(\mathrm{AB})} = \frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4} \text{ et } \mathrm{p}_{(\mathrm{AC})} = \frac{1+\sqrt{2}-2}{1+2\sqrt{2}-4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}.$$

Notons qu'on a aussi $\mathrm{p}_{(\mathrm{BC})} = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$. Le problème crucial est donc : a-t-on ou n'a-t-on pas l'égalité $\frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}$? Ou encore : deux au moins des trois rapports $\frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4}$, $\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}$ et $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ sont-ils égaux ?

On rencontre ainsi, sur un cas particulier, un grand problème des mathématiques : comment reconnaître si deux objets mathématiques d'un certain type sont ou ne sont pas le même objet ? Comment savoir par exemple si $7 \times 5 - 8 = 23$? Ou si $\frac{60}{84} = \frac{380}{532}$? Ou, encore, si $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} = n^3$?

À ce grand problème, il existe une solution générique, universelle : pour répondre à la question posée, il suffit chaque fois de disposer d'un *système d'écriture* des objets du type considéré, dans lequel chacun de ces objets ait *une écriture et une seule*. Le *calcul* de l'écriture « canonique » des objets à comparer permet alors de répondre : ainsi a-t-on $7 \times 5 - 8 = 35 - 8 = 27$, ce qui montre que $7 \times 5 - 8 \neq 23$. De même, il vient d'une part $\frac{60}{84} = \frac{4\times15}{4\times21} = \frac{3\times5}{3\times7} = \frac{5}{7}$, d'autre part $\frac{380}{532} = \frac{190}{266} = \frac{5\times19}{19\times7} = \frac{5}{7}$, en sorte qu'on peut conclure, cette fois, positivement : on a bien l'égalité $\frac{60}{84} = \frac{380}{532}$.

Revenons aux radicaux(4). On a d'abord :

$$\mathrm{p}_{(\mathrm{AB})} = \frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-2\right)}{\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}-4\right)} = \frac{2-2\sqrt{2}}{6-4\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}.$$

(4) C'est volontairement que nous n'utilisons pas, dans ce qui suit, la technique « classique » (par l'expression conjuguée) mais une technique plus rudimentaire, qui conduit naturellement à la technique classique, qui se laisse lire dans les calculs qu'elle engendre :

$$\frac{a+b\sqrt{e}}{c+d\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}\left(a+b\sqrt{e}\right)}{\sqrt{e}\left(c+d\sqrt{e}\right)} = \frac{c\left(a+b\sqrt{e}\right)-d\sqrt{e}\left(a+b\sqrt{e}\right)}{c\left(c+d\sqrt{e}\right)-d\sqrt{e}\left(c+d\sqrt{e}\right)} = \frac{\left(c-d\sqrt{e}\right)\left(a+b\sqrt{e}\right)}{\left(c-d\sqrt{e}\right)\left(c+d\sqrt{e}\right)}$$

$$\left(= \frac{\left(ac-bde\right)+\left(bc-ad\right)\sqrt{e}}{c^2-d^2\sqrt{e}}\right).$$

Il vient ainsi : $\dfrac{2\left(\sqrt{2}-2\right)}{2\left(3\sqrt{2}-4\right)}=\dfrac{3\left(1-\sqrt{2}\right)}{3\left(3-2\sqrt{2}\right)}$. L'égalité $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}$ justifie alors ceci :

$$\mathrm{p}_{(AB)}=\frac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4}=2\left(\sqrt{2}-2\right)+3\left(1-\sqrt{2}\right)=-1-\sqrt{2}=\frac{1}{1-\sqrt{2}}=\mathrm{p}_{(BC)}\ .$$

Les points A, B, C sont donc alignés.

Bien entendu, pour résoudre le problème proposé, on aurait pu procéder autrement. Dans de rares cas, on peut ainsi trouver avantage à aller *directement* d'un objet à l'autre sans passer par leur écriture canonique. Mais la chose exige souvent une virtuosité sans grand rapport avec le résultat visé : on a par exemple $\dfrac{60}{84}=\dfrac{6\times 60}{6\times 84}=\dfrac{360}{504}$ et $\dfrac{60}{84}=\dfrac{20}{28}$, d'où $\dfrac{60}{84}=\dfrac{360+20}{504+28}=\dfrac{380}{532}$. Il est vrai toutefois que, en certains cas, le passage par l'écriture canonique devra même être évité(5). Mais cet évitement ne va en général pas de soi, comme le montre l'exercice de virtuosité suivant :

« On a : $\mathrm{p}_{(AB)}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-2\right)}{\sqrt{2}\left(3\sqrt{2}-4\right)}=\dfrac{2-2\sqrt{2}}{6-4\sqrt{2}}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}-3}=\mathrm{p}_{(AC)}$;

d'où : $\mathrm{p}_{(AB)}=\dfrac{\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}-4}=\dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}-2\right)}{\left(2\sqrt{2}-3\right)-\left(3\sqrt{2}-4\right)}=\dfrac{1}{1-\sqrt{2}}=\mathrm{p}_{(BC)}$. »

Pourquoi donc « calculer » ? La réponse est maintenant évidente, et générale : pour identifier, par simple examen *formel*, l'objet auquel on a affaire et que l'on « calcule ».

Telle est la raison d'être *de tous les types de calculs* et des résultats correspondants *d'existence et d'unicité* (démontrés ou admis, explicites ou implicites) depuis l'école primaire jusqu'à l'université.

Oublier cette raison d'être, c'est donc rater le sens d'une grande partie des mathématiques enseignées – tous les calculs ! –, et c'est priver les élèves d'une clé essentielle pour comprendre « ce qu'on fait en maths », *depuis l'école primaire*. C'est se condamner à imposer aux élèves des exigences en apparence *mathématiquement immotivées* et donc prodiguer un enseignement *insensé* et *arbitraire*. Ainsi de ce professeur qui note :

> « Comment faire comprendre qu'il faut toujours simplifier une fraction, même quand le but de l'exercice n'est pas " écrire le plus simplement possible… " ? En particulier, dans

(5) Par exemple si l'on veut vérifier l'égalité
$$4[(a^2-b^2)cd+(c^2-d^2)ab]^2+[(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd]^2=(a^2+b^2)^2\,(c^2+d^2)^2.$$

un contrôle, des élèves ont écrit : $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{6\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{2-6} = \frac{6\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{-4}$. Ils ont suivi la consigne mais cela m'ennuie de leur mettre le maximum de points. Ils ne comprennent pas pourquoi cela me gêne “ puisque c'est pareil ”. »

Pourquoi donc récrire $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$? Peut-être parce que l'expression attendue, à savoir $\frac{3}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, fournirait des valeurs décimales approchées davantage… approchées ?

Nullement ! La forme initiale $x = \frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ montre que $x < \frac{6}{1+2} = 2$ et que $x > \frac{6}{2+3} = 1{,}2$, et donc que $1{,}2 < x < 2$. La forme demandée, soit $x = \frac{3}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, donne seulement $x < 1{,}5\ (3 - 1) = 3$ et $x > 1{,}5(2 - 2) = 0$, soit $0 < x < 3$. Si l'on prend $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ et $\sqrt{6} \approx 2{,}4$, on a : $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \approx \frac{6}{3{,}8} \approx 1{,}58$ et $\frac{3}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right) \approx 1{,}5$, valeur *moins proche* puisque $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \approx 1{,}55\ldots$

S'agissant donc du calcul de valeurs décimales approchées, l'expression $\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ est meilleure que l'expression « simplifiée » $\frac{3}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$.

La raison de l'écriture attendue(6), on le sait, est ailleurs. Mais elle restera cachée aux élèves parce que, en vérité, elle a déserté la culture mathématique, non de ce professeur particulier, mais de notre enseignement des mathématiques.

2.4. Exemple 3 : statistique(s)

Il est facile d'enseigner la statistique de manière insensée. Le professeur fournit aux élèves une série de données numériques et leur demande d'en calculer la moyenne et l'écart-type : il s'agit là – en est-on conscient ? – d'un simple *exercice de calcul*, non de statistique. La statistique est, en ce cas, résolument absente de la classe.

Ce qui, par contraste, *motive* le savoir statistique(7), ce qui en fait la raison d'être, c'est le besoin d'apporter réponse à des questions des types suivants :

---

6 Ici, le théorème d'existence et d'unicité est (implicitement) relatif à $\mathbf{Q}\left[\sqrt{2},\sqrt{3}\right]$: tout élément de ce corps s'écrit d'une manière unique sous la forme $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}$.

7 Dans le cas univarié. Ce qui suit doit beaucoup à Guy Brousseau.

« C'est quoi, un gros éléphant ? »

« Ça pèse combien, un éléphant ? »
« Ça gagne bien, un prof ? »
« Ça gagne combien, un prof ? »
« C'est quoi, un prof qui gagne bien ? »
« Un rectangle, ça doit être beaucoup plus long que large ? »
« Le prof m'a engueulé en me disant de dessiner un rectangle " normal ". C'est quoi un rectangle normal ? »

Justement : c'est quoi un rectangle « normal » ? On doit d'abord recueillir des données pertinentes – ici, 47 rectangles dessinés par 47 professeurs de mathématiques en réponse à la consigne : « Commencez s'il vous plaît par tracer un rectangle… ». On peut formuler des conjectures sur le rapport $r = \dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ que l'on va observer, penser par exemple que r sera proche de $\sqrt{2} \approx \dfrac{29{,}7}{21}$, ou qu'il sera voisin du nombre d'or (≈ 1,6). Les résultats observés, regroupés en classes d'amplitudes 0,2, fournissent pour moyenne 1,88, et pour médiane 1,9.

Une conclusion est claire : la première conjecture ($r \approx \sqrt{2}$ doit être rejetée ! En réduisant l'amplitude à 0,1, on obtient deux classes modales d'effectif 9 :]1,6;1,7] et]1,9 ;2].

Conclusion : la deuxième conjecture (le nombre d'or) ne peut pas être rejetée ; *mais une autre tendance se dégage* – autour de 2.

Bien entendu, il ne s'agit là que d'une *ébauche* d'étude, qu'il resterait à répéter, à amplifier, à compléter.

2.5. Exemple 4 : pourquoi les fractions ?

Les fractions d'entiers[8] sont des nombres nécessaires pour mesurer exactement certaines grandeurs : la longueur d'une baguette obtenue en coupant en 3 parts égales une baguette de 10 cm a pour mesure en cm le nombre $\dfrac{10}{3}$, qui n'est pas un nombre décimal[9]. Mais ce sont aussi des nombres qui permettent *de raisonner et de calculer* parce qu'ils permettent de *généraliser le concept de « nombre de fois »*, comme le montrent les exemples suivants :

« Si 8 sucettes coûtent 10 F, 24 sucettes, soit 3 fois 8 sucettes, coûteront [3 fois plus, soit] 3 fois 10 F (= 30 F) «

(8) Nicolas Rouche a consacré à cette question tout un petit livre intitulé judicieusement *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* (Ellipses, Paris, 1998).

(9) S'il existait des entiers naturels n et p, n non divisible par 10, tels que $\dfrac{10}{3} = \dfrac{n}{10^p}$ on aurait $10^{p+1} = 3n$: 2 et 5, qui divisent 10^{p+1}, diviseraient donc $3n$, et donc n, en contradiction avec l'hypothèse que 10 ne divise pas n.

« Si 8 sucettes coûtent 10 F, 11 sucettes, soit $\frac{11}{8}$ fois 8 sucettes, coûteront $\left[\frac{11}{8}\text{ fois plus, soit}\right]$ $\frac{11}{8}$ fois 10 F (= 13,75 F). »

« Si 8 sucettes coûtent 10 F, 3 sucettes coûteront $\left[\frac{3}{8}\text{ fois plus, soit}\right]$ $\frac{3}{8}$ fois 10 F (= 3,75 F). »

« Si a choses coûtent b francs, alors x choses, soit $\frac{x}{a}$ fois a choses, coûteront $\left[\frac{x}{a}\text{ fois plus, soit}\right]$ $\frac{x}{a}$ fois b francs. »

Contrairement à l'image qui s'impose trop vite aux élèves, les fractions *nous facilitent la vie* – elles nous font la vie *meilleure*. Trois places de spectacle ont coûté 162 francs. Il nous faut cinq places de plus. Combien va-t-on encore débourser ? La réponse est immédiate : $\frac{5}{3}$ fois plus, soit $162 \times \frac{5}{3}$ francs : 162 multiplié par 5 et divisé par 3, ma calculette indique… 270 francs !

3. L'apport des mathématiques : vrai parce que démontré

3.1. Une antique incompréhension

Dans la proposition 20 du livre I des *Éléments*, Euclide démontre que, en tout triangle ABC, on a BA + AC > BC. Proclus (V^e s) rapporte à ce propos une critique qui, depuis, n'a guère cessé(10) :

> « Les Épicuriens raillaient ce théorème, en disant qu'il était évident même pour un âne. Car si l'on place du fourrage à l'une des extrémités d'un côté, l'âne en quête de nourriture, parcourt un seul côté du triangle et non deux ! »

D'emblée s'installe ainsi une confusion sur la nature de la géométrie des mathématiciens. Une confusion qui dure encore, mais une confusion qui *peut* être levée, et qui *doit* l'être.

3.2. Géométrie expérimentale, géométrie théorique

Pour comprendre, il faut commencer par prendre quelque recul par rapport à la géométrie des mathématiciens, afin même d'expliciter le point de vue qui motive la critique profane de cette géométrie.

Commençons donc par nommer « géométrie » cette science *physique* dont l'objet est l'*espace sensible*, science des « faits spatiaux » (Charles Méray) qui peut à bon droit être regardée comme le « premier chapitre de la physique » (Einstein).

Dès lors, il devient clair, tout d'abord, que *seule l'expérience* permet de faire parler la nature et d'établir *en dernière instance* si tel « fait spatial » est avéré, si telle assertion est *vraie* dans l'espace sensible qu'étudie la physique.

(10) Bernard Vitrac, Commentaires, *in* Euclide, *Les Éléments*, PUF, Paris, 1990, p. 234.

La science géométrique est ainsi, d'abord, *géométrie expérimentale*. Gauss pensait qu'on ne pouvait « démontrer par le seul raisonnement la nécessité de la géométrie euclidienne » (lettre à Olbers, 1817). Pour en avoir le cœur net, il fit mesurer les angles d'un triangle formé par trois pics distants de 69, 85 et 197 km : la somme dépassait 180° de près de 15″, ce qui, étant donné la précision des mesures, était malheureusement insuffisant pour conclure.

Les « vérités » révélées par l'expérience sont ensuite *organisées déductivement*. On passe ainsi de la géométrie expérimentale à la géométrie *théorique* : certaines vérités expérimentales sont prises comme *axiomes*, les autres devront être *déduites* des axiomes.

Le premier apport des mathématiques tient alors en ceci que, à tout moment dans le processus d'élaboration de la géométrie théorique, toute assertion A démontrable dans la théorie géométrique disponible (TGD) est – sauf erreur ! – *vraie dans l'espace sensible* E ; soit, avec des notations empruntées aux logiciens : si $\vdash_{\text{TGD}}$ A alors $\models_{\text{E}}$ A.

Bien entendu, un désaccord entre TGD et expérience obligera à retoucher la TGD – ou à reprendre le travail expérimental.

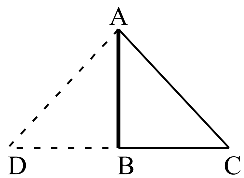
3.3. Géométrie théorique, géométrie mathématique

La géométrie « théorique » est en gros celle qui s'enseigne aujourd'hui encore au collège. Mais son lien fondateur avec l'expérience y est presque toujours rompu : cette géométrie théorise ainsi une réalité empirique quasi absente – on va y revenir.

La géométrie théorique met l'accent sur le travail *déductif* et sur l'organisation déductive de la géométrie qui en résulte. Or c'est dans ce travail de déduction – dont la signification tend aujourd'hui à n'être plus que celle d'un rituel – qu'on doit quelquefois aller trouver les raisons d'être de telle ou telle notion mathématique. Considérons ainsi l'assertion suivante :

① Dans un triangle rectangle, les angles adjacents à l'hypoténuse sont aigus.

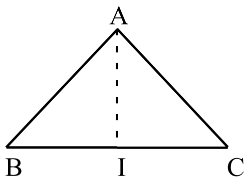
La démonstration qu'en donnaient autrefois les manuels de collège fait apparaître la motivation *théorique* de notions présentées trop souvent, à tort, comme purement descriptives – ici, celles d'angle *saillant* et d'angle *aigu* :



∂. Soit un triangle ABC rectangle en B. Soit D le symétrique de C par rapport à (AB) : le triangle CAD est isocèle. L'angle $\widehat{\text{CAD}}$ étant saillant (< 2d), l'angle moitié, soit $\widehat{\text{CAB}}$, est *aigu*. On montre de même que $\widehat{\text{BCA}}$ est aigu.

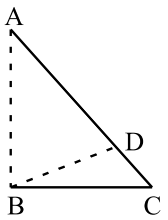
Ce premier travail déductif se poursuivait alors ainsi[11] :

(11) Nous présentons dans ce qui suit un choix « moyen » : bien que relativement figée, l'organisation déductive classique admettait en effet certaines variantes.



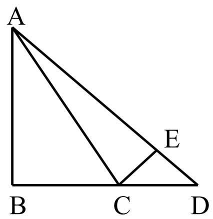
② Dans un triangle isocèle, les angles à la base sont aigus.

Démonstration. Soit ABC un triangle isocèle en A et soit I le milieu de [BC]. Le triangle AIB étant rectangle en I, l'angle $\widehat{ABC}$ est *aigu*, et il en est de même de $\widehat{ACB}$ (= $\widehat{ABC}$).



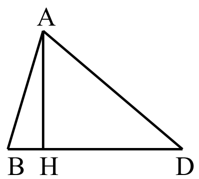
③ Dans un triangle rectangle, les côtés de l'angle droit sont inférieurs à l'hypoténuse.

Démonstration. ABC étant rectangle en B, soit D le point de]AC) tel que AD = AB (ci-dessus, à droite). Le triangle BAD étant isocèle en A, $\widehat{ABD}$ est *aigu*, de sorte que]BD) est *intérieur* à $\widehat{ABC}$: le point D appartient à]AC[. Il en résulte que AD < AC, soit donc que AB < AC. On montre de même que CB < CA.



④ Soit ABC un triangle rectangle en B et soit D un point de]BC) tel que BD > BC. Alors AD > AC.

Démonstration. Soit E ∈]AD) tel que AE = AC. CAE étant isocèle en A, $\widehat{ACE}$ est aigu. Par ailleurs $\widehat{ACB}$ est aigu comme angle non droit du triangle rectangle ABC : son supplémentaire $\widehat{ACD}$ est *obtus*, et donc supérieur à $\widehat{ACE}$: $\widehat{ACE} < \widehat{ACD}$). Il en résulte que E appartient à]AD[: on a ainsi AE < AD, i.e. AC < AD.



⑤ Dans tout triangle le plus grand côté est inférieur à la somme des deux autres, et les angles adjacents sont aigus.

Démonstration. On suppose que BC > CA > AB. Dans le triangle rectangle AHB, on a BH < BA, et on a donc BH < BC. De même, dans le triangle AHC, CH < CA < CB. Comme on a à la fois BH < BC et CH < CB, le point H appartient à]BC[, et l'on a donc BC = BH + HC < BA + AC. Les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{ACH}$ sont aigus comme adjacents à l'hypoténuse dans les triangles rectangles AHB et AHC. Comme $\widehat{ABH} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{ACH} = \widehat{ACB}$, les angles en B et C du triangle ABC sont *aigus*.

Bien entendu, les déductions précédentes présentent des failles et des imperfections, qui appelleraient un *travail mathématique spécifique*. Pour les identifier – en vue de les éliminer – il conviendrait déjà d'expliciter de manière rigoureuse la « TGD », laquelle, ici comme dans toute la tradition scolaire, n'est définie qu'approximativement. Au-delà de la géométrie « théorique », il existe donc une géométrie « mathématique », dont l'objet est la *mise au point fine* de la géométrie théorique : mais cette géométrie mathématique, qu'illustrent par exemple les *Grundlagen der Geometrie* (1899) de David Hilbert, relève aujourd'hui encore des « hautes mathématiques »(12).

(12) Les distinctions faites ici entre l'expérimental, le théorique et le mathématique reprennent des distinctions classiques en physique. Ainsi Jean-Marc Lévy-Leblond précise-t-il (dans « Physique et mathématiques », *in* R. Apéry *et al.*, *Penser les mathématiques*, Le Seuil, Paris,

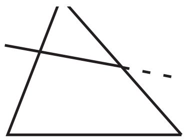
3.4. Le vrai et le démontrable : évident ≠ évident

Même si la théorie géométrique disponible a été soigneusement élaborée, il n'est pas sûr que, si A est vraie dans E ($\models_E$ A), alors A est déductible dans la TGD : $\vdash_{TGD}$ A (la réciproque, rappelons-le, est vraie, sauf erreur gravissime dans la construction de la TGD).

Il se peut par exemple, bien entendu, que la TGD soit trop « faible » encore, et qu'il faille rajouter un axiome pour assurer la déductibilité de A.

Mais il se peut aussi que l'on ait bien $\vdash_{TGD}$ A mais *qu'on n'arrive pas à l'établir*, parce que la démonstration de A dans la TGD « n'est pas évidente » !

En particulier, il arrive régulièrement qu'une assertion A apparaisse *clairement vraie* dans l'espace sensible, au point qu'une expérience en bonne et due forme ne semble pas même nécessaire pour s'assurer que $\models_E$ A.



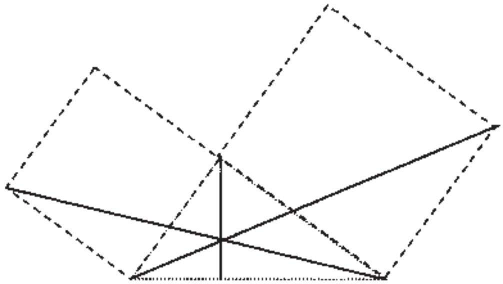
C'est ainsi que la *propriété de Pasch* – si une droite coupe un côté d'un triangle elle coupe un autre côté – nous apparaît « graphiquement évidente ». Mais comment établir cette assertion dans le cadre de la TG disponible en Quatrième par exemple ? Semblablement, on peut, à l'instar des Épicuriens contempteurs d'Euclide, regarder l'inégalité triangulaire comme *évidente* – parce qu'elle est (presque) évidemment *vraie dans* E. Mais comment la *démontrer* en telle TG donnée[13] ?

D'une manière générale, l'étude complète d'une assertion A suppose deux grandes étapes. Considérons la situation géométrique représentée ci-près : un triangle rectangle, les carrés construits sur les côtés de l'angle droit, et trois droites, dont la

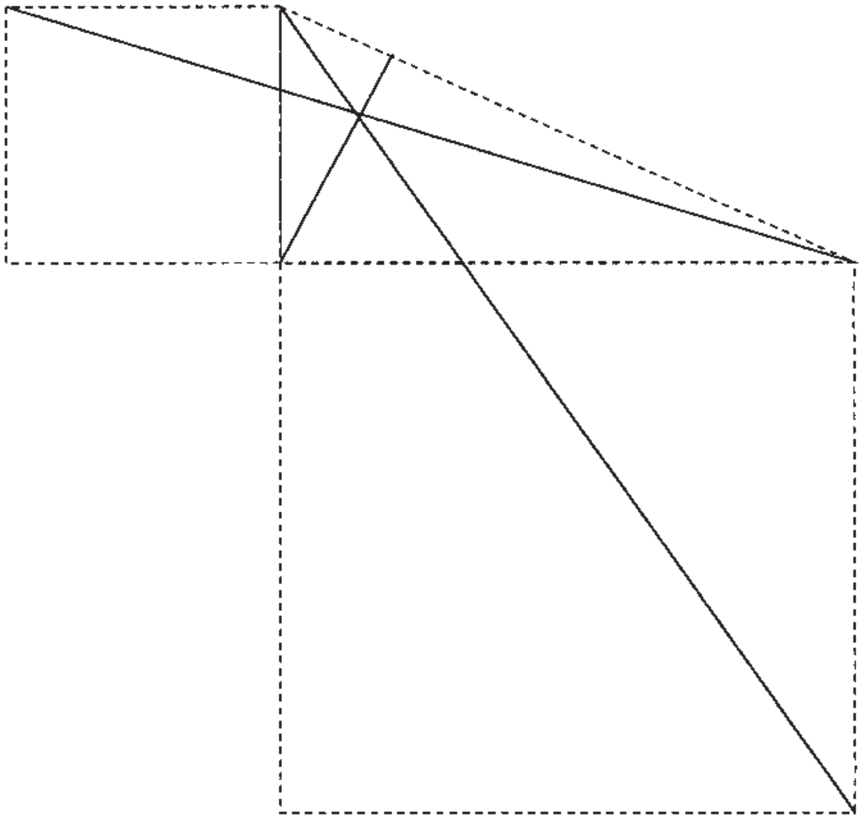
1982, p. 203-204) : « La physique théorique dégage et applique des lois ; elle crée et met en œuvre les concepts physiques sous la contrainte de la physique expérimentale et en interaction étroite avec celle-ci. Elle comporte différents niveaux, qui peuvent aller de l'interprétation de tel résultat expérimental spécialisé à l'aide des lois physiques connues jusqu'à la recherche de lois fondamentales nouvelles. Elle est mathématique dans la mesure où les mathématiques jouent un rôle constitutif qu'on a indiqué plus haut ». Le même auteur poursuit dans les termes suivants (*op. cit.*, p. 204) : « On désigne en général sous le nom de physique mathématique une activité beaucoup plus spécialisée, que l'on pourrait décrire comme une tâche de refonte et d'épuration de la physique théorique. À la naissance des théories physiques, leurs formulations se présentent comme des édifices, neufs certes, mais encore recouverts d'échafaudages et parsemés de débris provenant des anciennes constructions qu'elles remplacent. Retirer les échafaudages, enlever les débris, mettre en pleine lumière la structure interne de l'édifice, la nature et la solidité de ses assises comme ses points faibles, c'est ainsi que l'on peut décrire la tâche de la physique mathématique. Il s'agit donc d'une activité portant nécessairement sur des théories et des concepts déjà créés et assurés ».

(13) Une réponse est donnée plus haut, dans le cadre d'une théorie géométrique déterminée.

hauteur relative à l'hypoténuse du triangle rectangle[14]. Ces trois droites (en trait continu) se coupent-elles ?



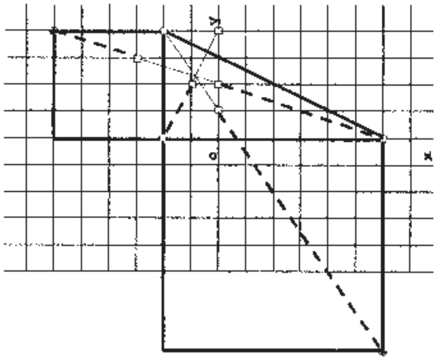
Commençons par une étude *expérimentale* de cette assertion : est-elle vraie dans l'espace sensible ? Pour cela, refaisons *en plus grand* la figure ci-dessus (épure A). Le petit triangle d'intersection grossit-il en proportion ? Il semble bien que non ! L'idée que les trois droites géométriques se coupent prend de la consistance.



Épure A

(14) Cette configuration apparaît dans la démonstration euclidienne du théorème de Pythagore : voir l'édition des *Éléments* citée plus haut, p. 283.

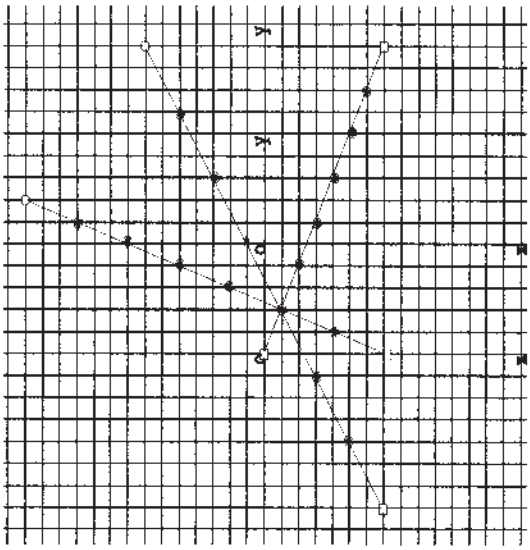
Procédons alors à une nouvelle expérience graphique, *sur quadrillage* cette fois (épure B) : notre conjecture se confirme.



Èpure B

Répétons la manœuvre en « zoomant » (épure C : on a pris C = B × 7). Cette fois, il n'y a plus guère de doute : les trois droites se coupent !

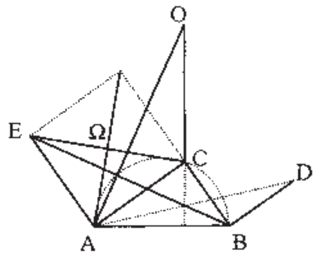
Peut-on alors *démontrer* ce « fait spatial », c'est-à-dire le déduire des assertions



Èpure C

composant la TGD ?

La faisabilité de la chose dépend bien sûr, théoriquement mais aussi pratiquement, de ce qu'est la TGD. Voici donc *une* démonstration.



Démonstration. Considérons la figure ci-dessous, où la droite (AO) est perpendiculaire à (BE). Soit Ω le centre du carré de sommets A, C, E.

Le quart de tour direct de centre Ω transforme E en A, A en C, et B en O. Par suite, (CO) est perpendiculaire à (AB). On en déduit de même que la perpendiculaire à (AD) passant par B passe par O. Les trois droites ne sont donc pas autre chose que les hauteurs du triangle AOB. Par suite, ces droites se coupent (théorème de Vecten, 1817).

3.5. Refonder, rebâtir

La complaisance mise à confondre expérience et déduction, évidence graphique et (non-)évidence démonstrative pèse sur l'enseignement actuel.

Cette attitude induit une confusion qui occulte l'apport propre des mathématiques à la « vie bonne » – quand l'expérience est muette, ou articule mal, les mathématiques disent le vrai à travers le démontrable.

Elle laisse en déshérence le problème démonstratif, qui doit pourtant être résolu *à nouveaux frais* chaque fois que change la théorie disponible : tout à coup, on ne démontre plus tel « résultat », et, bientôt, on ne sait plus le démontrer – comme le montre le cas de l'inégalité triangulaire.

Contre cette dérive dangereuse, les temps actuels exigent une véritable ambition créatrice : il faut désormais travailler à recréer un enseignement *raisonné* de mathématiques assumées comme telles, c'est-à-dire avec un intérieur (le déductible) et un extérieur (le vérifiable), avec du mathématisable et du mathématisé, selon une dialectique qui fonde les raisons d'être des objets mathématiques étudiés.

Le chantier est immense.