Sur une approche intrinsèque de la géométrie enseignée.

Alain Kuzniak(*)

Résumé : *La géométrie demeure une discipline très vivante avec de nombreuses applications au monde réel (physique, technologie, biologie, …). Malheureusement, une certaine tradition scolastique a parfois eu pour effet de refermer l'enseignement de cette discipline sur lui-même et de méconnaître certains aspects de la géométrie. Nous souhaitons montrer, à partir de la présentation de la notion d'espace localement euclidien, l'intérêt d'introduire une réflexion sur une approche intrinsèque de la géométrie dans l'enseignement. Cette manière d'aborder la géométrie, initiée par Riemann, renouvelle la vision classique de l'articulation entre espace et géométrie en insistant sur la relation local-global et sur les rapports métriques.*

Introduction

Dans son rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement, la commission ministérielle de réflexion sur l'enseignement des mathématiques définit la géométrie élémentaire comme étant la géométrie qui a été enseignée, à un moment ou un autre, dans le cadre de l'enseignement secondaire français (voire en classes préparatoires)[(1)]. Cette définition, sans doute commode dans un cadre de réflexion institutionnel, laisse doublement perplexe. D'une part, elle semble évacuer la justification de la présence ou de l'absence de certains contenus, d'autre part elle paraît résumer la définition d'un contenu scientifique à sa transposition scolaire dans une institution donnée.

C'est sur ce deuxième point que nous voulons revenir en présentant l'intérêt des approches intrinsèques, même élémentaires, de la géométrie dans le cadre de l'enseignement. Pour cela, nous développerons la notion de géométrie localement euclidienne.

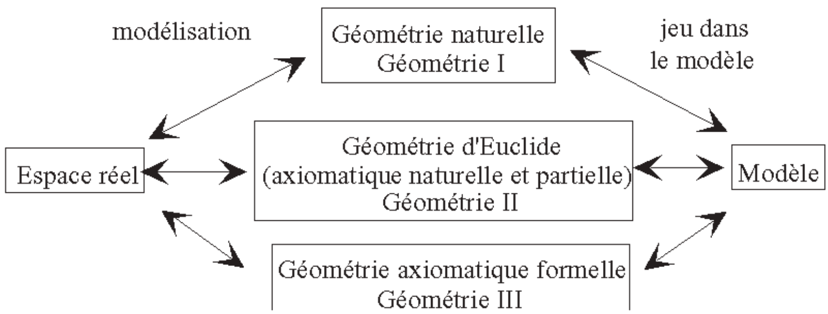
La vision classique de la géométrie

La géométrie euclidienne classique peut être envisagée comme la théorie de l'espace réel assimilé à $\mathbf{R}^3$ muni d'une structure euclidienne. Dans l'enseignement et dans la genèse épistémologique de cette géométrie on peut distinguer différents paradigmes englobés sous le même terme de « géométrie » qu'il est utile de distinguer pour analyser certains problèmes rencontrés dans l'enseignement de cette discipline.

(*) IUFM d'Alsace, Université Louis Pasteur. Département de Mathématiques, 7 rue Descartes, 67084 Strasbourg. kuzniak@math.u-strasbg.fr

(1) Bulletin APMEP nº 430 page 571.

Par exemple, avec C. Houdement[2], et dans une perspective de formation des enseignants, nous avons introduit et étudié trois types de paradigmes géométriques : la géométrie naturelle, la géométrie axiomatique naturelle et la géométrie axiomatique formaliste.
La Géométrie naturelle (Géométrie I) a pour source de validation la réalité et le monde sensible. Dans cette géométrie, une assertion est légitime si l'intuition d'un résultat et les conclusions d'une expérience ou d'une déduction correspondent. La confusion entre le modèle et la réalité est grande et tous les arguments sont permis pour justifier une affirmation et convaincre un interlocuteur.
Ensuite, nous rencontrons la Géométrie axiomatique naturelle dont le modèle est la géométrie euclidienne classique. Cette géométrie (Géométrie II) est bâtie sur un modèle proche de la réalité. Mais une fois les axiomes fixés, les démonstrations doivent se situer à l'intérieur du système pour être certaines.
Enfin, il y a la Géométrie axiomatique formaliste (Géométrie III) où le plus important est le système d'axiomes lui-même sans relation avec la réalité. Ce système doit être le plus complet possible, il est indépendant de ses applications possibles à l'étude de l'espace.
Dans cette optique, nous pouvons résumer le questionnement classique sous la forme suivante :



Dans cette approche de la géométrie, les géométries non-euclidiennes sont alors celles qui ne vérifient pas l'axiome des parallèles. Mais, à côté de cette tradition axiomatique existe une autre façon d'envisager la géométrie, toujours comme théorie de l'espace, et qui prend son origine dans les travaux de Riemann et notamment son *Habilitationvortrag* soutenue en 1854 « *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen* »[3].

(2) Voir par exemple Kuzniak et Houdement « *Quelques éléments de réflexion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres* » Revue Petit X nº 51 (1999).
(3) Une traduction française par J. Houel est disponible aux éditions Gabay : *Oeuvres mathématiques de Riemann*.

Une formulation locale et métrique de la géométrie

Dans ce texte fondamental(4), Riemann interroge les fondements de la Géométrie. Ces derniers sont constitués d'axiomes et de relations liant les objets. Mais la logique des principes de l'édifice n'apparaît pas : pourquoi ces axiomes, sont-ils nécessaires, comment les a-t-on choisis ?

> *Les rapports mutuels de ces données primitives restent obscurs ; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même a priori si elles peuvent l'être* (page 280).

Cette interrogation, formulée ici par un mathématicien de premier ordre, rejoint la question naïve des élèves, et plus généralement celle de tous les utilisateurs de la géométrie dans un cadre scolaire. Leur naïveté est sans doute plus grande et le type de réponse attendu ne renvoie pas nécessairement au champ de réflexion qui préoccupe Riemann. Mais le désir de l'intelligibilité est le même.

La voie que propose d'explorer Riemann est celle de grandeurs plusieurs fois étendues(5) (*mehrfach ausdedehnten Grössen*). Il s'agit pour lui de construire un concept d'espace par extension du concept de grandeur en général, les grandeurs de l'espace physique (*Raumgrössen*) en constituant un cas particulier. Dès l'introduction, Riemann annonce le contenu décisif de son traité :

> *Il ressortira de là qu'une grandeur de dimensions multiples est susceptible de différents rapports métriques, et que l'espace n'est par suite qu'un cas particulier d'une grandeur de trois dimensions* (page 281).

---

(4) Peut-être est-ce là le travail géométrique le plus important de tous les temps, sinon par son étendue – il était fort bref – du moins par le monde d'idées qu'il contenait, par la puissante lumière qu'il projetait sur la base de l'édifice géométrique, par les répercussions, géométriques et physiques, qu'il devait avoir. Barbarin et Buhl (1928) *La géométrie non euclidienne* (3e ed.) p. 142, Gauthier Villars.

(5) La première partie de l'exposé de Riemann, la plus générale et sans doute celle qui a donné lieu au plus d'interprétations diverses, introduit l'*extension de la grandeur à plusieurs dimensions* de manière assez imprécise et un peu floue. Le point important est que cette construction se fait de proche en proche en étendant progressivement le nombre de dimensions nécessaires et en distinguant les extensions continues et discrètes.

> *les modes de détermination parcourus formeront une variété de dimension une, dont le caractère essentiel est que, dans cette variété, on ne peut, en partant d'un point, s'avancer d'une manière continue que dans deux directions : en avant et en arrière. Imaginons maintenant que cette variété se transporte à son tour sur une autre variété complètement distincte, et cela encore d'une manière déterminée, c'est-à-dire tellement que chacun de ses points se transporte en un point déterminé de l'autre variété ; l'ensemble des modes de détermination ainsi obtenus formera une variété de dimension deux.*

L'autre idée qui donne tout son sens à la notion de dimension est qu'une grandeur n fois étendue est exactement déterminée par n grandeurs. Ainsi, la variété peut aussi être définie de manière intrinsèque sans recours aux coordonnées de l'espace ambiant.

La notion ainsi introduite est à la source de la notion moderne de variété. Dans le cadre général présenté par Riemann dans sa première partie, il s'agit plutôt de l'idée de variété topologique, les variétés différentielles (au sens moderne du terme) constituent le germe de la seconde partie.

Comme l'espace, défini par la construction euclidienne, de la géométrie élémentaire n'est pas la conséquence nécessaire de la construction développée par Riemann, basée sur la notion de variété et de courbure, il ne peut prétendre être *a priori* le modèle de l'espace physique. Seule l'expérience permet de faire le choix crucial du bon espace de représentation.

La géométrie élémentaire euclidienne : une géométrie parmi d'autres.

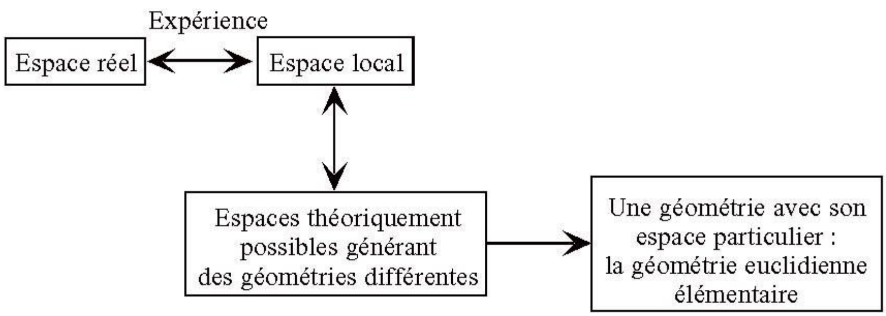
Le détour par l'étude des conceptions de Riemann éclaire les liens entre la géométrie et la modélisation de l'espace. Quelques points nous semblent particulièrement fondamentaux dans une perspective didactique.

- L'existence de multiples géométries, la géométrie euclidienne n'étant qu'une géométrie parmi d'autres. Ces géométries vont être générées de manière naturelle en insistant sur certains points cruciaux de la modélisation en acte de l'espace.
- L'insistance sur la localité. Les hypothèses fondatrices résultent d'observations locales et il faut être prudent sur toute généralisation.
- L'insistance sur la difficile adéquation du modèle avec la réalité. Le choix des faits nécessaires pour modéliser l'espace n'a rien d'évident et plusieurs directions existent.

et enfin

- L'insistance sur la mesure des grandeurs (même abstraites) pour fonder et générer la géométrie. Cela constitue une rupture par rapport à la tradition euclidienne. Il s'agit aussi d'une rupture par rapport à une certaine tradition de l'enseignement dans sa version axiomatique renforcée par la trilogie affine, projectif, euclidien.

Nous résumons dans un nouveau schéma la problématique de la géométrie en tant que théorie de l'espace telle qu'elle nous apparaît dans cette approche.



Le problème de l'articulation local-global.

D'une certaine manière, le passage du local au global s'effectue par une opération de la pensée qui reproduit à l'infini sans les modifier les propriétés rencontrées localement. Le local n'est que la réduction à l'identique du monde global et inversement ce dernier apparaît comme un monde local dont on aurait supprimé les murs.

Mais Riemann a modifié radicalement cette vision et plusieurs types de problèmes sont alors envisageables.

1) Les propriétés retenues, vraies dans l'espace qui nous entourent le sont-elles encore dans l'infiniment petit et dans l'infiniment grand ? Ceci est un problème de physique, mais ce problème vient perturber la question initiale sur l'unicité de la géométrie naturelle.
2) L'extension de la géométrie localement perçue comme euclidienne donne-t-elle nécessairement l'espace euclidien?

C'est Klein qui le premier a développé et résolu le problème de décrire tous les espaces globaux qui localement étaient indiscernables de l'espace euclidien dans le cadre de sa théorie des formes spatiales (*Raumformen*). Nous allons présenter ce problème en donnant un sens plus précis à la notion d'espace localement euclidien et ceci à partir de l'étude du cas du cylindre. Cette étude nous semble *a priori* fructueuse grâce à son aspect particulièrement intuitif.

Les espaces localement euclidiens

Un premier exemple : une « géométrie naturelle » du cylindre

Nous considérons ici la surface de révolution classique, c'est-à-dire la surface infinie de dimension deux définie par un cercle directeur et des droites génératrices dont la direction est perpendiculaire au plan contenant le cercle directeur. L désigne la longueur du cercle directeur.

Nous pouvons, à la manière de l'écrivain anglais Abbott dans son roman Flatland, imaginer un habitant de cette surface cylindrique. Cet habitant va être conduit à développer une géométrie naturelle qu'il peut construire en s'appuyant sur la notion de distance. Nous pouvons ainsi bâtir une géométrie métrique qui permet de résoudre un certain nombre de problèmes issus de l'expérience et nécessaires à la géométrie pratique des habitants du cylindre. Voici quelques-unes de ces questions :

Quel est le plus court chemin d'un point à un autre ? La réponse à cette question permet de développer une notion de droite sur la surface si l'on définit de manière classique la droite comme « le plus court chemin d'un point à un autre »(6).

Quelles sont les propriétés des triangles et des figures usuelles, par exemple la somme des angles du triangle est-elle égale à 180° ?

Le théorème de Pythagore est-il vrai ? etc.

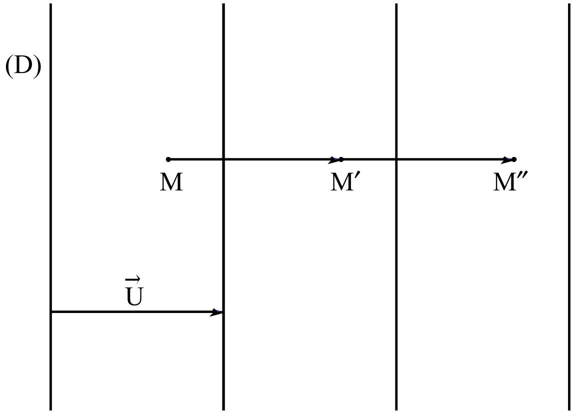
Nous invitons le lecteur à essayer de résoudre ces différents problèmes sans lire immédiatement la suite de cet article. On peut aussi utiliser les rouleaux de papier essuie-tout (vides) et étudier la manière dont ils sont faits.

Nous allons voir que pour résoudre ces différents problèmes, il est indispensable de disposer de plusieurs modèles de la surface cylindrique.

Un premier modèle (Modèle 1) résulte du développement isométrique du cylindre roulant sur le plan.

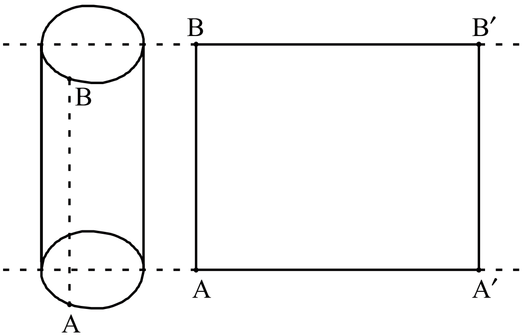
(6) C'est la définition donnée par Arnauld et Pascal dans leurs *Nouveaux éléments de Géométrie*, 1667 (Irem Dijon).

Nous le ferons même rouler autant de fois que nécessaire. Nous obtenons un réseau constitué de droites parallèles à une droite (D).



Dans ce réseau, deux points M et M′ sont équivalents, par définition, s'ils sont les images sur le plan du même point du cylindre dans le déroulement précédent. En d'autres termes, s'il existe un entier relatif n et une translation t de vecteur $n\ \vec{U}$ telle que $M' = t(M)$ où $\vec{U}$ est un vecteur dont la longueur est le périmètre L du cercle directeur. Ce modèle permet de représenter de manière continue les courbes qui comme les hélices, font plusieurs fois le tour de la surface.

Un deuxième modèle (Modèle 2) est constitué par la bande plane délimitée par les deux droites parallèles (AB) et (A′B′).

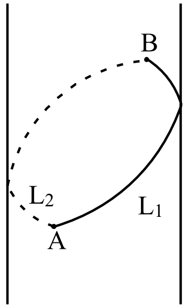


Ce modèle apparaît comme l'image du cylindre découpé suivant une génératrice et déroulé sur le plan. Dans ce cas, il faut considérer comme identiques deux points sur les droites (AB) et (A′B′) qui sont confondus sur la génératrice avant le développement.

Ces modèles plans donnent naissance à des espaces de travail sur une feuille de papier ou sur l'écran d'un ordinateur.

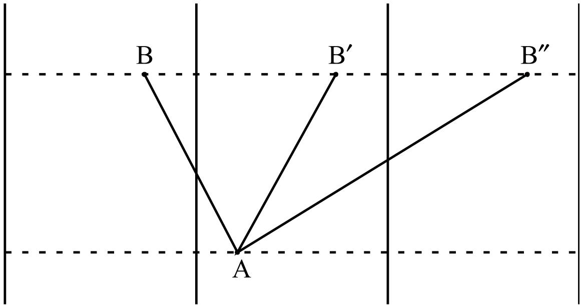
Ainsi en LOGO, la tortue peut quitter l'écran sur le coté droit pour réapparaître en un point opposé sur le coté gauche.

Nous disposons ainsi de deux représentations du cylindre qui vont nous permettre de résoudre les problèmes que nous nous posons à propos de la définition d'une géométrie naturelle sur cette surface.



À titre d'exemple, nous allons envisager le problème de la définition des géodésiques sur le cylindre.
Une première difficulté surgit pour définir la distance de deux points du cylindre (plus court chemin de A à B). En effet, il existe deux possibilités pour rejoindre B à partir de A, on peut l'aborder par la gauche ou par la droite, laquelle des deux lignes est-elle la plus courte ?

Plaçons-nous dans le réseau plan (Modèle 1) associé au cylindre, le point B est équivalent aux points B′, B″, etc. La distance de B à A est ainsi obtenue en considérant le plus court des segments $[AB_i]$.



Suivant la position de A par rapport à la médiatrice de BB′, le chemin le plus court sera AB ou AB′.

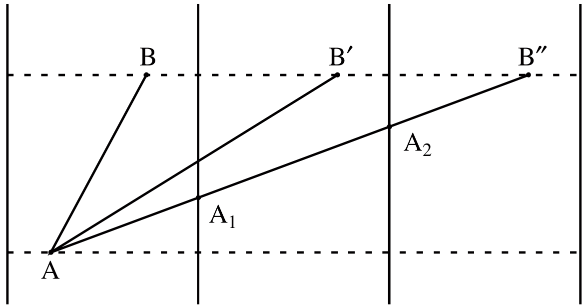
Les droites tracées sur le modèle 1 forment un angle constant avec les génératrices et si l'on retourne maintenant à la surface cylindrique dans $\mathbf{R}^3$, les lignes ainsi obtenues sont des hélices.

Par extension, nous allons appeler droites du cylindre les lignes obtenues en prolongeant le segment de plus courte longueur qui joint A à B. Quelles sont alors toutes les droites du cylindre ?
À coté des hélices, il y a aussi les génératrices qui joignent deux points reliés par une droite parallèle à D.

Enfin, si deux points sont situés sur une perpendiculaire à D, la droite est alors un cercle directeur du cylindre. Dans ce cas, on remarque que la droite (le cercle directeur) est bornée et n'est donc pas illimitée comme dans le plan euclidien.
Il y a donc trois types distincts de droites : les hélices, les cercles directeurs et les génératrices.

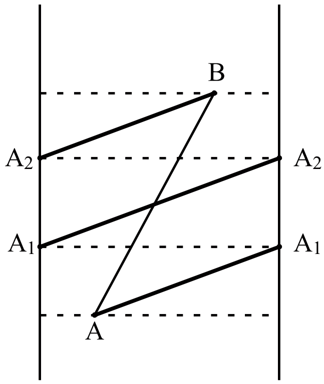
Une autre propriété fondamentale de la géométrie euclidienne est fausse dans la géométrie du cylindre : en effet, par deux points il passe une infinité de droites. On peut le vérifier grâce aux deux figures suivantes tracées dans les modèles 1 et 2.
En effet, dans le modèle 1, B, B′ et B″ correspondent au même point B du cylindre

Modèle 1



ce qui montre bien que par les deux points A et B passent plusieurs droites (AB), (AB′) et (AB″).

Modèle 2



Cependant, le segment [AB″] du modèle 1 est représenté par les segments [AA_1], [A_1A_2] et [A_2B] dans le modèle 2. Pour un observateur local situé sur le cylindre, ces différents segments apparaissent comme des segments de droites parallèles alors qu'en fait il s'agit de la même droite du cylindre.
Ainsi, si l'on restreint l'étude de la géométrie du cylindre à un voisinage d'un point, il n'existe qu'une droite qui passe par deux points : la géométrie locale de ce voisinage est une géométrie euclidienne
De la même façon, grâce au développement plan, on peut vérifier que le théorème de Pythagore est vrai et que la somme des angles dans un triangle est toujours égale à 180°.
Pour conclure, nous pouvons affirmer que dans tout disque de rayon constant L/4[7] (L désigne la longueur du cercle directeur) le cylindre possède une géométrie euclidienne, ce n'est pas le cas globalement. Nous dirons alors que l'espace en question est **localement euclidien**.

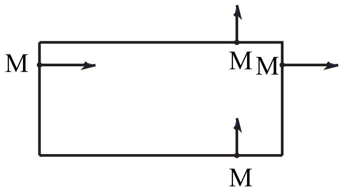
(7) Dans ce disque, la distance de deux points A et B est inférieure à L/2, et ainsi aucun point du plan équivalent à B ne peut être plus proche de A que B.

***Géométrie localement euclidienne : le cas général*[8].**

Nous définirons, de manière assez intuitive, les espaces localement euclidiens, comme des espaces dont la géométrie sur tout disque dont le diamètre est inférieur à une valeur fixe L, est une géométrie euclidienne[9].
En dimension deux, nous venons de voir qu'il existe au moins deux espaces localement euclidiens : le plan euclidien et le cylindre. En existe-t-il d'autres ? En fait, il y a cinq espaces localement euclidiens de dimension 2 : le plan, le cylindre, le tore, le cylindre de Möbius, la bouteille de Klein.

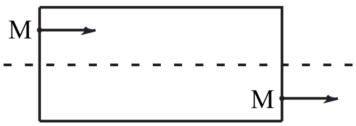
Le problème de la description de tous ces espaces est résolu grâce à la mise en évidence d'un groupe d'isométries qui agit sur une partie du plan, le domaine fondamental. Ces groupes ont la propriété d'être totalement discontinus et sans point fixe : il s'agit donc de sous-groupes de pavage du plan ou de l'espace considéré. Ainsi, pour décrire un espace il faut connaître son domaine fondamental et son groupe d'isométries ; on peut ensuite essayer de donner la surface de l'espace $\mathbf{R}^3$ qui en est aussi l'image, pas nécessairement isométrique.

Le cylindre

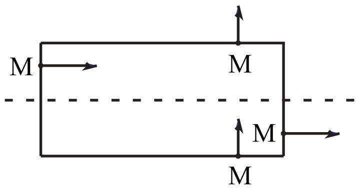


Le tore

On peut aisément réaliser en LOGO, ces deux géométries. Il faut autoriser le mode enroulement latéral (pour le cylindre) et latéral et vertical (pour le tore)



Le cylindre de Möbius



La bouteille de Klein

On peut plonger cette surface dans $\mathbf{R}^3$, en réalisant un ruban de Möbius, mais infini.

Il s'agit de la surface la plus complexe, son plongement dans $\mathbf{R}^3$ est imparfait puisqu'il n'est pas injectif.

(8) Pour une présentation plus complète de cette partie, on peut consulter Cartan E. (1928) *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann* chez Gauthier-Villars, Klein F. (1928) *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie*, et Nikulin et Shafarevitch (1982) *Groups and Geometry*, les deux ouvrages chez Springer Verlag.
(9) Une manière plus rigoureuse, dans le droit fil de la pensée de Riemann, consiste à appeler ainsi les variétés dont l'élément linéaire est euclidien.

En LOGO[10], il est possible d'envisager ces deux dernières géométries mais en introduisant une tortue bicolore, rouge et bleue. Ainsi, dans la cas de Möbius, la tortue quitte l'écran latéralement en bas et à droite avec sa partie rouge vers le haut et revient latéralement en haut et à gauche avec sa partie rouge vers le bas. Voici un monde bien désorientant à l'image de ces surfaces qui ne sont pas orientables !

L'étude de la bouteille de Klein envisagée comme un espace localement euclidien montre que cet exemple, souvent présenté comme pathologique, surgit naturellement dans les mathématiques et dans l'œuvre de Klein en particulier. Ce dernier définit la surface qui porte son nom comme un tore à une seule face (einseitig Ringform) et il l'obtient à partir du domaine fondamental [Klein opus cité page 262]

1) En réunissant d'abord deux côtés parallèles ce qui donne un tube dont les extrémités ont une orientation contraire.

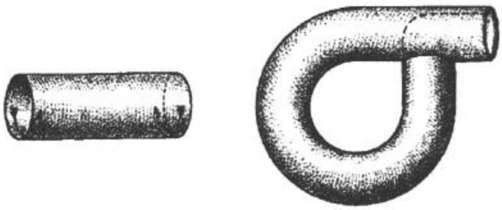


Abb. 197. Abb. 198.

2) En réunissant ensuite les deux extrémités du tube, ce qui oblige dans $\mathbf{R}^3$ à faire pénétrer la surface dans elle-même.

Vers une approche intrinsèque de l'enseignement de la géométrie ?

Pour conclure de manière provisoire, nous énonçons un certain nombre de pistes, en précisant qu'il ne s'agit évidemment pas pour nous de substituer l'approche intrinsèque à l'approche classique mais de réfléchir à l'enrichissement qu'apporte cette vision à l'enseignement.

1) Sur la diversité des géométries

La vision naïve de la géométrie éclate et ceci sans nécessairement recourir aux géométries non-euclidiennes les plus complexes. La validité de la modélisation traditionnelle qui consiste à passer de la perception de l'espace au modèle géométrique sans interroger le passage du local au global, est remise en cause pour des raisons mathématiques.
Nous pouvons noter l'utilité d'introduire une réflexion sur la notion des modèles utilisables comme support pour faire de la géométrie. Il s'agit de véritables espaces de travail pour l'élève-géomètre. Ces espaces dépendent de la géométrie choisie par l'intermédiaire du domaine fondamental dans le cas des géométries localement euclidiennes.

(10) Pour plus de renseignements sur LOGO et pour éventuellement le télécharger, on peut consulter le site de l'association Réseau Logo http://logo.openbe.net/index.html

2) Sur l'intérêt mathématique d'une approche intrinsèque

Sans nier l'importance et la nécessité du modèle euclidien ne serait-ce que comme référence, on ne peut exclure de l'enseignement les approches intrinsèques de la géométrie. En effet, il est grand temps de prendre en compte la révolution épistémologique survenue à la fin du XIX^e^ siècle et de préparer les élèves à une vision contemporaine de la géométrie et de la physique. Il est en effet devenu usuel de jongler entre les diverses modélisations de l'espace en fonction de leur efficacité pour résoudre les divers problèmes abordés.
L'enseignement français paraît figé sur le point de vue conventionnaliste développé par Poincaré :
Les axiomes géométriques ne sont donc ni des jugements synthétiques a priori ni des faits expérimentaux. Ce sont des conventions. (...)Une géométrie ne peut pas être plus vraie qu'une autre ; elle peut seulement être ***plus commode****. Or la géométrie euclidienne est et restera la plus commode*(11).
Cette approche privilégie la modification des règles de calcul au sein d'un modèle éventuellement dépassé mais familier alors que dans le point de vue scientifique moderne c'est la modification du modèle qui permet d'interpréter et de comprendre les faits.

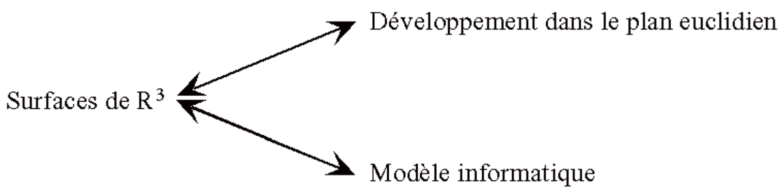
3) Sur l'intérêt didactique de cette approche

Les diverses géométries, notamment localement euclidiennes, appuyées sur des espaces différents et familiers peuvent apparaître comme les différents cadres d'un jeu didactique (au sens de R. Douady). Ce jeu peut donner du sens à la définition des objets rencontrés : nous avons vu le problème des droites, mais il en est ainsi de tous les objets qui sont à la base du raisonnement géométrique. On peut ainsi espérer favoriser le processus de définition par les élèves, fondamental en classe, mais difficile à mettre en œuvre. En effet, dans le cadre de la géométrie euclidienne trop d'évidences perceptives viennent parasiter ce processus.
Cette variété des géométries attire aussi l'attention sur la nature des invariants à privilégier et ceci à un moment où les programmes de Lycée réintroduisent les triangles congruents et les triangles de même forme.
Cependant, la question reste entière de déterminer le type de mise en œuvre possible dans la scolarité des élèves et dans la formation des enseignants. Il s'agit là d'un thème possible de recherche didactique profond et à long terme non inféodé à la pression versatile de l'institution scolaire.

4) Sur la possibilité d'expérimenter

La considération des espaces localement euclidiens, notamment celui du cylindre et du tore, donne aux élèves la possibilité de mener une expérience dans le monde réel. Le passage effectif du modèle abstrait à sa réalisation concrète sur une surface, le jeu dans le modèle rendu possible grâce à certains logiciels de géométrie donnent un sens intuitif fort à ces géométries. Cela nous semble une condition nécessaire pour pouvoir envisager des mises en œuvre dans les classes.

(11) Poincaré H (1906) *La Science et l'Hypothèse*, p. 66-67 Flammarion.



5) Sur le nouveau sens de la géométrie naturelle

L'ensemble de ces approches renouvelle l'intérêt de bâtir la géométrie naturelle en l'adaptant à son espace de référence. Cette approche de la géométrie basée sur des problèmes métriques rejoint partiellement l'approche de Clairaut au XVII^{e} siècle, mais elle propose une grande diversité de modélisation. Cependant la dérive est rapide qui fait passer des problèmes de mesure de l'espace à la mesure effective de l'espace et qui transforme l'élève-géomètre en élève-arpenteur.