D'Apollonius à Lemoine

Georges Lion

Introduction.

Les résultats présentés ci-dessous ne sont pas nouveaux. Pour la plupart les démonstrations qu'on en donne dans les livres utilisent des outils élaborés en Terminale et même au delà. Notre objectif est ici de prouver ces résultats de manière au moins aussi simple et beaucoup plus élémentaire. Afin de pouvoir situer ce travail, la référence aux programmes du collège, envisagée dans un premier temps, s'est révélée ensuite inappropriée notamment parce que tout ce qui suit ne fait aucun appel aux transformations lesquelles font au contraire partie de ces programmes.

Pour décrire aussi bien les méthodes employées que l'esprit dans lequel elles ont été développées, j'ai dû éliminer le qualificatif « élémentaire » qui aurait prêté à confusion ; ayant de même écarté « ancienne, rustique, primitive » (trop réducteurs), j'ai finalement opté pour la dénomination de **Géométrie première**. Le lecteur jugera de la pertinence de ce choix et voudra bien, je l'espère, ne pas m'accuser de prétention pour avoir risqué ce clin d'œil en direction des Arts premiers.

Les piliers de la géométrie première sont les suivants :

– La proportionnalité.
– Les invariants : longueurs, aires, angles non orientés qui tombent hélas en désuétude.
– Les triangles semblables dont la réintroduction est liée dans les deux sens à la réhabilitation des angles.
– Le théorème des milieux parfois supplanté à tort par celui de Thalès.
– Les théorèmes de Thalès et de Pythagore à quoi l'on ne saurait réduire la géométrie du collège.

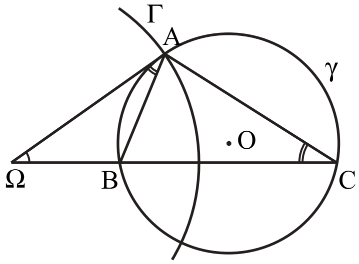
Notre progression s'appuie par ailleurs sur des résultats classiques dont on a donné en annexe des démonstrations ressortant intégralement de la géométrie première afin que l'objectif énoncé ci-dessus soit atteint.

Dans tout ce texte on supposera que ABC est un triangle non isocèle : son cercle circonscrit γ a pour centre O et pour rayon r. À la demande du Comité de lecture, les mesures algébriques ont été évitées autant que possible ; elles apparaissent uniquement en ce qui concerne la puissance de l'orthocentre de ABC par rapport à γ.

Je remercie le comité de lecture du Bulletin et spécialement Henri Bareil pour ses conseils.

I. Cercles d'Apollonius.

Définition



Si Ω est à l'intersection de (BC) et de la tangente menée en A à γ, le cercle Γ de centre Ω et passant par A est appelé cercle d'Apollonius.
On définit de même $\Omega' \in$ (CA) et $\Omega'' \in$ (AB), Γ' de centre Ω' et passant par B, Γ'' de centre Ω'' et passant par C.

Les angles marqués sur la figure sont égaux (théorème de l'angle inscrit) et cela implique que sont semblables ΩBA et ΩAC, d'où $\dfrac{\Omega B}{\Omega A} = \dfrac{\Omega A}{\Omega C} = \dfrac{BA}{AC}$.

Il vient :

$$\frac{\Omega B}{\Omega C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 \qquad (1)$$

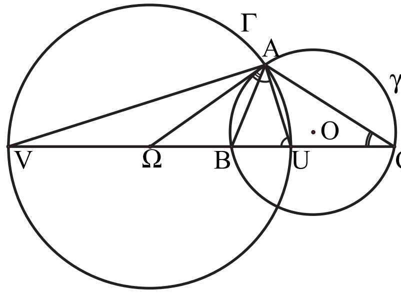
et

$$\Omega B \cdot \Omega C = \Omega A^2 \quad (2)$$

Remarque: La relation (1) caractérise Ω sur (BC) \ [BC], c'est à dire la droite (BC) privée du segment [BC] (annexe 1) ; d'après l'annexe 3, il en est de même de la relation (2) qui de plus informe sur le rayon de Γ.

Propriété fondamentale

Théorème I. Le cercle d'Apollonius Γ coupe (BC) aux mêmes points que les bissectrices de $\widehat{BAC}$. C'est le lieu géométrique des points M tels que $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB}{AC}$.



Démonstration : a) Le cercle Γ coupe (BC) en U et V tels que :

$$\Omega U^2 = \Omega V^2 = \Omega A^2 = \Omega B \cdot \Omega C.$$

U par exemple appartient à [BC]. Le triangle AΩU étant isocèle,

$\widehat{\Omega AU} = \widehat{\Omega UA}$.

Sachant $\widehat{\Omega AB} = \widehat{UCA}$, on a par soustraction : $\widehat{BAU} = \widehat{UAC}$.

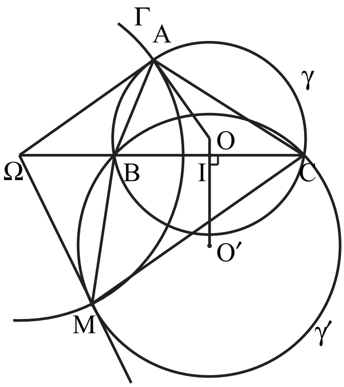
(AU) est bissectrice intérieure et (AV) perpendiculaire à (AU) est bissectrice extérieure

b) Soit M hors de (BC) tel que $\dfrac{MB}{MC} = \dfrac{AB}{AC}$; le centre du cercle d'Apollonius de BMC est Ω d'après la remarque ci-dessus, d'où le rayon $\Omega M = \sqrt{\Omega B \cdot \Omega C} = \Omega A$; M appartient à Γ.

c) Soit I le milieu de [BC], $M \in \Gamma \setminus (BC)$, γ' de centre O′ circonscrit à BMC, alors

$$\begin{aligned}\Omega M^2 = \Omega A^2 &= O\Omega^2 - OA^2 \\ &= O\Omega^2 - OB^2 \\ &= I\Omega^2 - IB^2 \\ &= O'\Omega^2 - O'M^2 \quad \text{(Pythagore)}\end{aligned}$$

$$\Omega M^2 = O'\Omega^2 - O'M^2$$



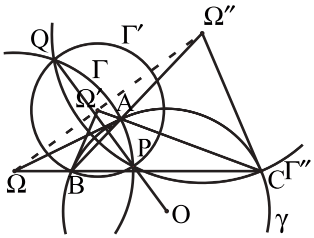
Donc (ΩM) est tangente en M à γ', Γ est cercle d'Apollonius de BMC et $\dfrac{MB}{MC} = \sqrt{\dfrac{\Omega B}{\Omega C}} = \dfrac{AB}{AC}$.

Remarque: De même $\Gamma' = \left\{ M \,\middle|\, \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{BA}{BC} \right\}$ et $\Gamma'' = \left\{ M \,\middle|\, \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{CA}{CB} \right\}$.

Pinceau des cercles d'Apollonius

Corollaire I : Les trois cercles d'Apollonius Γ, Γ′, Γ″ passent par deux points P et Q ; leurs centres sont alignés sur la médiatrice de [PQ].

Supposons par exemple AB < AC ; alors B est intérieur à Γ, donc aussi tout point de]AB] tandis que C est extérieur à Γ. Le cercle Γ″ a un point dans]AB] (le pied de la bissectrice intérieure de $\widehat{ACB}$) et passe par C. Γ et Γ″ sont sécants en P et Q.



Sachant $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{AB}{AC}$, $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{CA}{CB}$,

on a : $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{BA}{BC}$, $P \in \Gamma'$.

De même $Q \in \Gamma \cap \Gamma' \cap \Gamma''$.

Corollaire II: Les points P et Q sont alignés avec O.

En effet la puissance de O par rapport aux trois cercles d'Apollonius est égale à r^2, donc O se trouve sur leur axe radical (PQ) (voir annexe 3).

Remarques. 1) Les points P et Q sont alignés avec le point de Lemoine du triangle ABC (§ III).

2) Le théorème I peut être démontré en utilisant directement le cercle de diamètre [UV] ou bien, au prix de l'introduction de nouveaux outils, à l'aide des vecteurs, des nombres complexes, ou plus simplement des coordonnées.

3) De la remarque qui précède le théorème I jointe au théorème de Ménélaüs (annexe 4), on déduit l'alignement des centres des cercles d'Apollonius ; de la puissance commune de O, on déduit alors que ces trois cercles appartiennent à un même pinceau (c'est-à-dire ont un axe radical commun). Pour obtenir l'existence de P et Q, on doit ensuite reprendre le début de la démonstration du corollaire I.

II. Un autre triplet de cercles

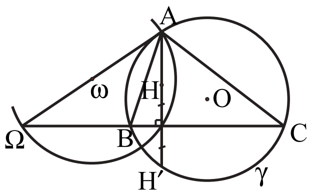
Rappelons que la droite d'Euler du triangle ABC joint le point O et l'orthocentre H et que le segment [OH] contient le centre de gravité G de façon que OH = 3OG (voir [DPR] page ?).

La droite d'Euler comme axe radical.

Théorème II : Pris deux à deux les cercles de diamètre [AΩ], [BΩ′] et [CΩ″] ont pour axe radical commun la droite d'Euler de ABC.

Notons ω, ω', ω'' les centres de ces cercles et démontrons que le point O a même puissance par rapport aux trois cercles.
Par Pythagore $O\omega^2 - \omega A^2 = OA^2 = OB^2 = O\omega'^2 - \omega'B^2 = O\omega''^2 - \omega''C^2$ de même

Soit H l'orthocentre de ABC, H′ symétrique de H par rapport à (BC) ; H′ appartient à γ (voir [DPR] page ?)
Alors



$$H\omega^2 - \omega A^2 = \overline{HA} \cdot \frac{\overline{HH'}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\mathcal{P}(H,\gamma) = \frac{HO^2 - r^2}{2}.$$

Et de même pour la puissance de H par rapport aux deux autres cercles. Ainsi (OH) est l'axe radical des trois cercles étudiés.

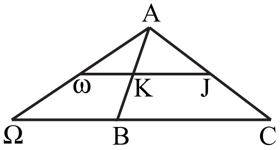
Corollaire : a) Les centres des trois cercles étudiés sont alignés.
b) Si deux des cercles sont sécants, le troisième passe par les points d'intersection ; c'est le cas lorsque les angles de ABC sont aigus.

Une autre approche

On peut appliquer le théorème de Ménélaüs (annexe 4) à l'obtention du résultat précédent.

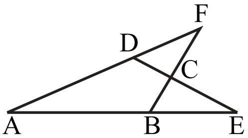
D'abord sachant $\frac{\Omega B}{\Omega C} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$, $\frac{\Omega' B}{\Omega' C} = \left(\frac{BC}{BA}\right)^2$, $\frac{\Omega'' B}{\Omega'' C} = \left(\frac{CA}{CB}\right)^2$, on obtient l'alignement de Ω, Ω′, Ω″ par multiplication.

Ensuite I, J, K désignant les milieux des côtés de ABC, le théorème des milieux donne : $\omega J = \frac{1}{2}\Omega C$, $\omega K = \frac{1}{2}\Omega B$, d'où $\frac{\omega K}{\omega J} = \frac{\Omega B}{\Omega C}$ et de même $\frac{\omega' I}{\omega' K} = \frac{\Omega' C}{\Omega' A}$, $\frac{\omega'' J}{\omega'' I} = \frac{\Omega'' A}{\Omega'' B}$.



L'alignement ω, ω', ω'' se déduit alors de celui de Ω, Ω', Ω'' par le théorème de Ménélaüs.

Remarque : Cette méthode revient en fait à montrer sur la figure ci-contre l'alignement des milieux de [AC], [BD], [FE] (théorème de Newton).



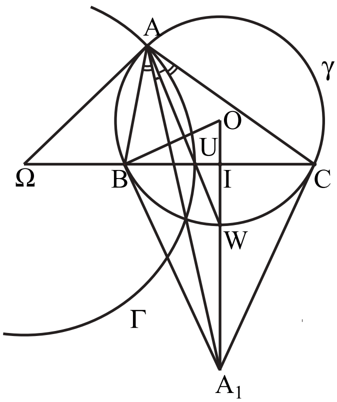
III. Le point de Lemoine.

Symédiane issue de A

Sur la figure -ci-contre la relation

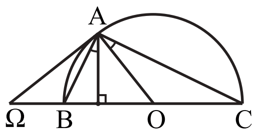
$$OI \cdot OA_1 = OB^2 = OA^2$$

entraîne que γ est cercle d'Apollonius pour le triangle A_1AI.
D'après le théorème 1 la droite (AA_1) est symétrique de la médiane (AI) par rapport à (AW) qui est bissectrice de $\widehat{BAC}$ (théorème de l'angle inscrit).



On appelle (AA_1) la **symédiane** issue de A.

Si $\widehat{BAC}$ est droit, la symédiane est la hauteur issue de A.



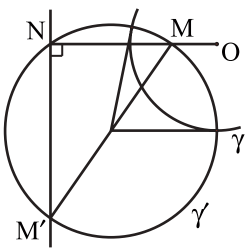
Cercles orthogonaux

Soit M et M′ deux points distincts de O ; N le point en lequel (OM) recoupe le cercle γ' de diamètre [MM'].

Alors : $\widehat{MNM'}$ est droit et $\mathcal{P}(O,\gamma') = \overline{OM} \cdot \overline{ON}$.

Pour que γ et γ' se coupent à angle droit (on dit « soient orthogonaux ») il faut et il suffit que l'on ait :

$$\overline{OM} \cdot \overline{ON} = r^2.$$



Polaire d'un point par rapport à un cercle

M étant donné, le lieu géométrique des points M′ tels que le cercle de diamètre [MM′] soit orthogonal à γ est la droite perpendiculaire à (OM) menée par le point N tel que $OM \cdot ON = r^2$.

Cette droite s'appelle la **polaire** de M par rapport à γ.

Réciprocité polaire

La relation soulignée entre M et M′ est symétrique donc :

$$M' \in \text{ polaire de } M \Leftrightarrow M \in \text{ polaire de } M'.$$

Concours des symédianes

Les polaires de A, B, C sont respectivement (AΩ), (BA_1), (CA_1) ; la polaire de A_1 est donc (BC) qui contient Ω ; la polaire de Ω est donc (AA_1), c'est la symédiane issue de A, y compris lorsque $\widehat{BAC}$ est droit. De même les polaires de B et de C sont respectivement les symédianes issues de B et de C, leur point d'intersection F a donc pour polaire la droite (Ω′Ω″) qui passe par Ω, F appartient à la polaire de Ω : les trois symédianes concourent en F appelé **point de Lemoine** du triangle ABC, la droite (OF) est perpendiculaire à (ΩΩ′) et contient donc P et Q.

Remarque: Une autre manière de montrer le concours des symédianes consiste à introduire le point X en lequel la symédiane issue de A coupe le côté [BC].

De la relation $\dfrac{AC \times d(I, AC)}{AB \times d(I, AB)} = 1$, on déduit :

$$\frac{XB}{XC} = \frac{\text{aire } XBA}{\text{aire } XCA} = \frac{AB \times d(X, AB)}{AC \times d(X, AC)} = \frac{AB \times d(I, AC)}{AC \times d(I, AB)} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2.$$

On a de même : $\dfrac{YC}{YA} = \left(\dfrac{BC}{BA}\right)^2$, $\dfrac{ZA}{ZB} = \left(\dfrac{CA}{CB}\right)^2$ et l'on conclut grâce au théorème de Céva (annexe 5).

Conclusion

Notre introduction annonçait l'efficacité. Le lecteur attentif aura pu discerner la simplicité avec laquelle les développements s'enchaînent : les cercles d'Apollonius utilisent naturellement la puissance et introduisent les symédianes (§ III) ; le lien entre les deux alignements fait découvrir une application de Ménélaüs au théorème de Newton. Dans [L], page 120, exercice 67, on pourra trouver une généralisation de ce travail traitée par des moyens analogues.

En matière de « vitalité géométrique » le sujet traité ici n'a rien d'exceptionnel : on en voit des exemples tous les ans dans la solution des exercices des Olympiades dont les responsables ne craignent pas d'apprécier l'usage des angles et des proportions.

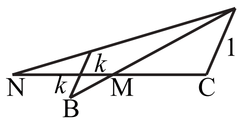
En France la géométrie première pourrait être mieux considérée : au cours de conversations avec des collègues ou des étudiants, en lisant les rapports de concours, j'ai eu souvent l'impression que les méthodes plus sophistiquées en vigueur au lycée avaient conquis dans les esprits le monopole de la rigueur et de la créativité. Aussi je remercie les responsables du Bulletin de l'APMEP d'avoir démenti mon pessimisme en publiant cet article. Ainsi le dossier géométrie se trouve établi dans l'équilibre nécessaire à la pérennité de l'enseignement de cette discipline.

Références :

[DPR] Duperret, Perrin, Richeton. Ce Bulletin.
[L] Lion Géométrie du Plan. Éditions Vuibert.

ANNEXES

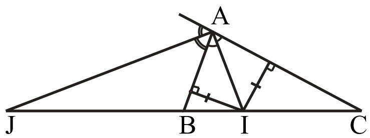
1. Soit [BC] un segment et $k > 0$; sur la figure ci-contre est indiquée la construction des points M et N tels que M $\in$ [BC] et $\dfrac{MB}{MC} = k$, N $\in$ [BC] et $\dfrac{NB}{NC} = k \neq 1$.



L'unicité de M et de N vient aussi du théorème de Thalès.

2. Pieds des bissectrices

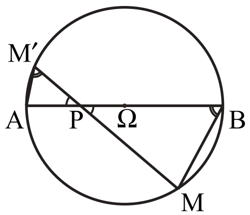
Soit ABC un triangle tel que AB ↑ AC ; la bissectrice intérieure (resp. extérieure) de $\widehat{BAC}$ coupe (BC) en I (resp. J).

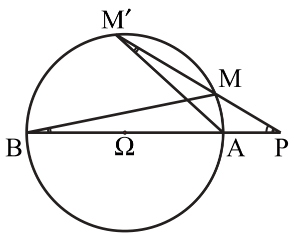


Alors on a : $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{\text{aire IBA}}{\text{aire ICA}} = \dfrac{AB}{AC}$ et de même pour $\dfrac{JB}{JC}$.

3. Puissance d'un point par rapport à un cercle. Axe radical de deux cercles

Proposition I : Soit Γ un cercle de centre Ω et de rayon R ; soit P un point du plan. Alors pour toute droite passant par P et rencontrant Γ en M et M′ on a : $\overline{PM} \cdot \overline{PM'} = P\Omega^2 - R^2$.





Comme plus haut sont semblables PAM′ et PMB, d'où : $\dfrac{PM'}{PB} = \dfrac{PA}{PM}$.

Par ailleurs et par convexité du disque, dans chacun des cas les produits $\overline{PM}\cdot\overline{PM'}$ et $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$ sont du même signe. D'où

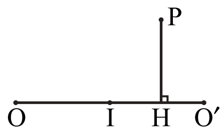
$$\overline{PM}\cdot\overline{PM'}=\left(\overline{P\Omega}+\overline{\Omega A}\right)\left(\overline{P\Omega}+\overline{\Omega B}\right)=P\Omega^2-R^2.$$

Définition : $P\Omega^2 - R^2$ est notée $\mathcal{P}(P,\Gamma)$ et appelée **puissance de P par rapport à Γ**.

Remarques.

1) Dans le second cas de figure M et M′ peuvent être confondus ; alors (PM) est tangente à Γ, et $PM^2 = P\Omega^2 - R^2$. Réciproquement si L, M, N sont des points de Γ, si P, L, M sont alignés et si $\overline{PL}\cdot\overline{PM}=PN^2$ alors (PN) est tangente à Γ.
2) La proposition I peut être démontrée par Pythagore à l'aide du milieu de [MM′].

Proposition II : Soit Γ(O,R) et Γ′(O′,R′) deux cercles non concentriques ; Alors l'ensemble $\{P \mid \mathcal{P}(P,\Gamma) = \mathcal{P}(P,\Gamma')\}$ est une droite perpendiculaire à (OO′) **appelée axe radical de Γ et Γ′**.



Soit I le milieu de [OO′], H le projeté orthogonal de P sur (OO′).

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(P,\Gamma)-\mathcal{P}(P,\Gamma')&=PO^2-PO'^2-R^2+R'^2\\&=HO^2-HO'^2-R^2+R'^2 \quad \text{(Pythagore)}\\&=\left(\overline{HO}+\overline{HO'}\right)\left(\overline{HO}-\overline{HO'}\right)-R^2+R'^2\end{aligned}$$

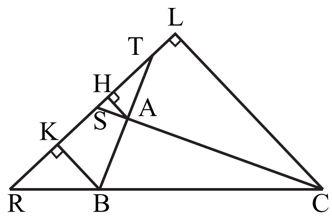
$\mathcal{P}(P,\Gamma) = \mathcal{P}(P,\Gamma')$ si et, seulement si $\overline{IH}=\dfrac{R^2-R'^2}{2\overline{OO'}}$.

Tout point commun aux deux cercles appartient à l'axe radical.

4) Théorème de Ménélaüs

Proposition : Soit R ∈ (BC) \ [BC], S ∈ (CA) \ [CA], T ∈ (AB) \ [AB] ; pour que R, S, T soient alignés, il faut et il suffit que l'on ait : $\dfrac{RB}{RC}\times\dfrac{SC}{SA}\times\dfrac{TA}{TB}=1$.

a) *la condition est nécessaire* : On a $\dfrac{RB}{RC}=\dfrac{BK}{CL}$; $\dfrac{SC}{SA}=\dfrac{CL}{AH}$; $\dfrac{TA}{TB}=\dfrac{AH}{BK}$ et l'on termine en multipliant.



b) *la condition est suffisante* :

Si elle a lieu, sachant $\frac{RB}{RC} \neq 1$, on a : $\frac{SC}{SA} \neq \frac{TB}{TA}$, (ST) n'est pas parallèle à (BC) et coupe (BC) en R′.
A, B, C étant par hypothèse d'un même côté de (ST), R′ n'appartient pas à [BC]. En appliquant a) on obtient $\frac{RB}{RC} = \frac{R'B}{R'C}$ d'où R = R′. R, S, T sont alignés.

5) Théorème de Céva

Proposition : Soit P ∈]BC[, Q ∈]CA[, R ∈]AB[; pour que les droites (AP), (BQ), (CR) soient concourantes il faut et il suffit que l'on ait : $\frac{PB}{PC} \times \frac{QC}{QA} \times \frac{RA}{RB} = 1$.

En effet]AP[est l'ensemble des points M intérieurs au triangle tels que $\frac{d(M, AB)}{d(M, AC)} = \frac{d(P, AB)}{d(P, AC)}$ ou $\frac{\text{aire AMB}}{\text{aire AMC}} = \frac{\text{aire APB}}{\text{aire APC}} = \frac{PB}{PC}$. Les points de]BQ[et]CR[ont des caractérisations analogues ; notons S le point d'intersection de]BQ[et]CR[, on a : $\frac{\text{aire ASC}}{\text{aire ASB}} = \frac{\text{aire CSA}}{\text{aire CSB}} \times \frac{\text{aire BSC}}{\text{aire BSA}} = \frac{RA}{RB} \times \frac{QC}{QA}$; pour que S appartienne à]AP[il faut et il suffit que ce rapport soit égal à $\frac{PC}{PB}$, c'est à dire que la relation de l'énoncé ait lieu.

Remarque : On peut appliquer ceci au concours des droites joignant les sommets de ABC aux points de contact des côtés opposés avec le cercle inscrit (point de Gergonne) ou avec les cercles exinscrits (point de Nagel) ; pour montrer le concours des hauteurs une version « algébrisée » de Céva serait nécessaire.