

Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : analyse de quelques exercices de géométrie

Jean-Claude Duperret, Daniel Perrin,
Jean-Pierre Richeton

0. Introduction

L'objectif de cet article est d'illustrer sur quelques exemples concrets les principes qui ont été énoncés dans le rapport d'étape de la commission Kahane sur la géométrie (cité [R] dans ce qui suit). On a choisi d'examiner des exercices qui peuvent être abordés et résolus au cours de la scolarité obligatoire (collège ou classe de seconde), mais qui peuvent avoir des prolongements au-delà⁽¹⁾. On a souhaité que les exercices vérifient les trois critères suivants :

- Les exercices doivent être de niveau élémentaire, mais non évidents, de sorte que chacun soit obligé de réfléchir pour les résoudre (même les experts ?)⁽²⁾. Ce sont souvent des problèmes de constructions ou de lieux géométriques.
- Chaque exercice doit admettre plusieurs solutions, fondées sur des approches différentes. (En particulier nous avons banni les exercices qui reposaient sur une astuce obligée.
- Chaque exercice doit pouvoir être proposé à plusieurs niveaux (avec là encore des solutions diverses selon ces niveaux)⁽³⁾.

Les exercices proposés sont conçus comme des exercices de **recherche**⁽⁴⁾ (la plupart ont été effectivement proposés à des élèves). Ils supposent qu'on laisse une large autonomie aux élèves, à la fois dans la mise au jour de conjectures, dans l'élaboration de stratégies pour les aborder et dans la validation finale. C'est pourquoi les exercices ne comportent pas d'intermédiaires qui risqueraient de figer la recherche.

(1) Dans ce texte nous nous sommes limités à la géométrie plane. Il est clair qu'un travail analogue pour la géométrie dans l'espace est aussi nécessaire.

(2) Cette condition est facile à remplir. Il est en effet frappant de voir comme on peut facilement sécher sur un exercice de géométrie, même quand on possède largement le bagage mathématique pour l'aborder.

(3) Une introduction précoce des cas d'isométrie et de similitude peut permettre d'atteindre cet objectif.

(4) Nous conseillons vivement au lecteur de chercher les exercices avant d'en lire les solutions. S'il en trouve de nouvelles nous sommes bien sûr intéressés.

On a aussi souhaité mettre en lumière dans chaque exemple deux aspects qui peuvent parfois entrer en conflit :

- La multiplicité des approches permettant d'aboutir. Dans certains cas on a l'impression que toute idée un peu intelligente conduit à une solution. Il est important d'être conscient de ce fait pour encourager les élèves à l'autonomie (pour modifier un peu le problème, par exemple) et à l'initiative (pour effectuer une construction supplémentaire, par exemple). Bien entendu, gérer ce type de situations en classe est difficile pour le professeur et coûteux en temps. De plus on doit tempérer l'enthousiasme par le point suivant.
- L'importance d'avoir repéré certaines méthodes universelles qui sont autant de béquilles pour aider l'apprenti géomètre. Il est clair que toutes les solutions d'un même problème ne sont pas d'égal intérêt et, même s'il doit laisser une large initiative aux élèves, le maître doit aussi leur apprendre les méthodes les plus simples et les plus efficaces. Dans la lignée de [R] on a notamment mis l'accent ici sur l'utilisation des invariants (surtout les longueurs et les angles, pour les aires on renvoie à l'article [P]) et des cas d'isométrie et de similitude des triangles, avec toutefois un paragraphe sur l'utilisation directe des transformations : ne jetons pas le bébé avec l'eau du bain⁽⁵⁾ ! On insiste aussi fortement sur l'importance des figures (apprendre aux élèves à **voir** nous semble un objectif essentiel). Enfin, d'autres outils sont aussi mis en valeur, notamment le calcul et l'utilisation de logiciels de géométrie.

1. Quelques principes de résolution d'un problème de géométrie

Comme on l'a dit plus haut, il n'est jamais évident de démarrer un problème de géométrie. Nous donnons cependant, dans ce paragraphe, quelques principes et quelques pistes qui méritent d'être systématiquement employées. Certaines sont valables pour tous, élève comme professeur, d'autres seulement pour le professeur. Bien entendu, chacun, selon sa culture, son expertise, son intuition pourra proposer d'autres voies. Nous avons divisé ces principes en catégories et nous les avons numérotés, de façon à pouvoir y faire allusion dans les exemples⁽⁶⁾.

a) Des principes généraux

- *G1 : Faire une figure.*

C'est la base de la géométrie. Souvent, si on sait la lire, la figure donne des renseignements intéressants, elle suggère des conjectures, etc. L'utilisation des logiciels de géométrie, qui permettent de modifier sans effort la figure, de tester les conjectures, est un atout à ne pas négliger.

- *G2 : Qu'est-ce qu'on sait, qu'est-ce qu'on cherche ?*

Il s'agit de lire l'énoncé en y repérant hypothèses et conclusions et en notant le type du problème : propriétés d'incidence, recherche de lieux, de constructions, etc. On verra que parfois cette lecture est déjà porteuse de nombre d'informations.

(5) Les cas d'isométrie et de similitude sont d'ailleurs vus ici comme des critères de transitivité des groupes de transformations correspondants agissant sur les triangles.

(6) Nous sommes loin d'être les premiers à tenter une telle réflexion sur les méthodes. Sans remonter jusqu'à Chasles [Ch], citons [BZ] (avec des préoccupations qui rejoignent souvent les nôtres) et [Ro].

- *G3 : Simplifier, modifier le problème.*

Il s'agit de la phase qui consiste à noter des simplifications éventuelles du problème, des étapes intermédiaires de sa solution, voire des généralisations qui peuvent être pertinentes. Dans cette phase une étape importante est d'énoncer des conjectures.

- *G4 : Utiliser des heuristiques, des associations d'idées.*

Selon les cas, les termes de l'énoncé peuvent avoir de multiples échos. Par exemple si l'énoncé comporte le mot parallèle, on doit penser immédiatement aux thèmes suivants : angles alternes-internes, correspondants, etc. ; parallélogramme, vecteurs colinéaires ; Thalès, homothétie, droite des milieux ; etc.

- *G5 : Faire preuve d'initiative et d'autonomie.*

Cela vaut pour l'élève comme pour le professeur et chacun peut apporter sa pierre (on verra ci-dessous que des idées biscornues peuvent parfois aboutir). Cela peut signifier ici :

- Faire des constructions supplémentaires.
- Abandonner certaines contraintes de l'énoncé et traiter un problème plus simple, quitte à revenir ensuite au problème initial (sur ce thème, voir aussi [BZ]).

b) Des méthodes mathématiques

- *M1 : Le cadre.*

Il est important de savoir dans quel cadre mathématique on évolue, pour pouvoir utiliser les méthodes qui s'y rapportent. Pour un expert cela signifie savoir dans quelle géométrie on se trouve, au sens du programme d'Erlangen. C'est en général ici le cadre affine euclidien. On s'attend donc à avoir à utiliser les invariants euclidiens (longueurs, angles, aires) et/ou les transformations euclidiennes (isométries, similitudes). Cela peut être aussi un cadre purement affine où les aires joueront un rôle crucial. À un niveau plus élevé, cela pourrait être un cadre projectif où le birapport trouverait sa juste place.

Cette vision de la géométrie peut permettre au professeur, en repérant simplement de quelle géométrie relève un problème, d'en trouver rapidement la solution (lui donnant ainsi un temps d'avance sur ses élèves). Elle permet aussi, souvent, de déduire une adaptation de cette solution au niveau des classes. Nous donnons au paragraphe 8 quelques indications sur ce thème.

- *M2 : Les grands choix : invariants, cas d'isométrie et de similitude, transformations.*

Ce point est fondamental. Nous avons essayé, tout au long de ce texte, de mettre en évidence la pertinence de l'usage des invariants. Pour les cas d'isométrie et de similitude, nous avons regroupé dans un paragraphe spécial quelques arguments théoriques en faveur de leur utilisation assortis de quelques exemples qui l'illustrent. Comme nous ne souhaitons nullement que la promotion des invariants et des cas d'isométrie conduise à la disparition des transformations nous avons donné quelques exemples où celles-ci sont particulièrement efficaces.

• *M3 : Le calcul.*

Le calcul est aussi un aspect essentiel de la géométrie et il a le mérite d'être la plupart du temps une voie de solution. Il n'est pas interdit, lorsqu'on ne parvient pas à résoudre un problème par des moyens géométriques, de le mettre en équations. On constate alors, souvent, qu'une lecture attentive des calculs fournit aussi la solution géométrique convoitée.

Par exemple dans les problèmes de construction à la règle et au compas, il est important pour le professeur de savoir qu'une construction avec ces outils revient à construire des nombres qui se calculent à partir des données par des expressions rationnelles ou avec des racines carrées : c'est l'interprétation d'Euclide par Descartes, cf. § 5 ci-dessous.

2. Le lieu de l'orthocentre

a) Le problème

Nous partons du problème suivant :

Soient Γ un cercle et B, C deux points fixes de Γ . Quel est le lieu de l'orthocentre du triangle ABC quand A varie sur Γ ?

Formulé ainsi, le problème n'est pas évident. La première urgence est d'essayer de se faire une idée de ce que peut-être ce lieu, et ce par tous les moyens (c'est l'aspect : qu'est-ce qu'on cherche, cf. G2). Le plus simple pour cela est de faire une figure, et même plusieurs (cf. G1). Dans cette situation, l'utilisation d'un logiciel de géométrie est un atout majeur en ce qu'il permet de recommencer la figure en faisant varier le point A sans se fatiguer et même de tracer directement le lieu. Nous avons utilisé ici le logiciel CABRI, avec deux variantes, la fonction *Lieu* et les fonctions *Trace* et *Animation*. Dans les deux cas on voit apparaître comme lieu un cercle Γ' , visiblement symétrique de Γ par rapport à la droite (BC)⁽⁷⁾.

b) Le symétrique de l'orthocentre

Si l'on part de l'idée que le lieu est le cercle symétrique de Γ par rapport à (BC), le résultat à démontrer est donc le suivant :

(7) Le mot visiblement mérite ici une explication. En effet, lorsqu'on a deux cercles de centres O et O', de même rayon, sécants en B et C, il y a une infinité d'isométries qui les échangent.

Comme isométries positives il y a la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ et toutes les rotations de centre appartenant à (BC) et qui transforment O en O' (et notamment la symétrie centrale σ_1 par rapport au milieu de [BC]) ; comme isométries négatives il y a la symétrie d'axe (BC) et des symétries glissées. Bien entendu, toutes ces transformations ne présentent pas le même caractère d'évidence. Notre opinion (mais on peut en avoir une différente) est que la plus naturelle est la symétrie par rapport à la droite (BC) (surtout, comme c'est le cas ici, lorsque cette droite est déjà tracée sur la figure). Les deux autres transformations les plus faciles à voir

sont ensuite la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$ (que l'on perçoit bien avec l'outil animation de CABRI qui semble indiquer que le vecteur \overrightarrow{AH} est constant) et la symétrie σ_1 (mais celle-ci n'est apparente que si l'on a construit le point I, ce qui n'est pas le cas *a priori* au départ). Nous allons voir que ces trois façons de percevoir Γ' mènent toutes à une solution, chacune en transformant le problème initial (cf. G3).

Soient ABC un triangle et H son orthocentre. Le symétrique H' de H par rapport au côté $[BC]$ est sur le cercle circonscrit.

Ici le cadre est clair : c'est celui de la géométrie euclidienne (cf. M1). On peut donc penser à utiliser les invariants longueur et angle ou les transformations (cf. M2). Comme la forme de la conclusion (cocyclicité de points) évoque le théorème de l'angle inscrit (ou plutôt sa réciproque) et que l'hypothèse de symétrie a aussi une traduction angulaire, on élabore donc une stratégie fondée sur les angles (cf. G4, M2).

Pour démontrer que les points A, B, C, H' sont cocycliques il suffit de démontrer que des angles inscrits interceptant le même arc sont égaux ou supplémentaires. Comme il y a dans le quadrilatère $ABH'C$ quatre côtés et deux diagonales, cf. figure 2.1, cela fait six possibilités, logiques *a priori*. Nous allons voir que toutes mènent au résultat. Nous traitons le cas où l'orthocentre H est intérieur au triangle. Les autres cas sont analogues, mais si l'on n'utilise pas les angles orientés, il faut *a priori* distinguer les cas de figures. On note A', B', C' les pieds des hauteurs.

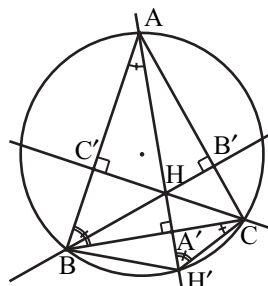


Figure 2.1

Il suffit, par exemple, de démontrer $\widehat{BCH'} = \widehat{BAH'}$ (réciproque du théorème de l'angle inscrit). Or on a $\widehat{BCH'} = \widehat{BCH}$ (par la symétrie) et $\widehat{BCH} = \widehat{BAH'}$ (les points A, C, A', C' sont sur le cercle de diamètre $[AC]$, ou encore, ces angles sont tous deux complémentaires de \widehat{ABC}). On a évidemment un raisonnement similaire en échangeant les rôles de B et C .

Préfère-t-on démontrer $\widehat{AH'C} = \widehat{ABC}$? On a $\widehat{AH'C} = \widehat{CHH'}$ (symétrie). Or le supplémentaire de cet angle est $\widehat{C'HA'}$ qui est aussi supplémentaire de \widehat{ABC} car B, A', H, C' sont cocycliques. Ou encore : le complémentaire de cet angle est \widehat{BCH} qui est aussi complémentaire de \widehat{ABC} . On a évidemment un raisonnement similaire en échangeant les rôles de B et C .

On peut encore vouloir démontrer que les angles \widehat{BAC} et $\widehat{BH'C}$ sont supplémentaires. Pas de problème, puisque l'on a $\widehat{BH'C} = \widehat{BHC}$ par symétrie et cet angle est opposé par le sommet à $\widehat{BH'C}$ qui est supplémentaire de l'angle en A car les points A, B', H, C' sont cocycliques.

Enfin, on peut vouloir démontrer que les angles $\widehat{ABH'}$ et $\widehat{ACH'}$ sont supplémentaires. On note qu'on a $\widehat{ABH'} = \widehat{ABC} + \widehat{CBH'}$ et $\widehat{ACH'} = \widehat{ACB} + \widehat{BCH'}$. On remarque ensuite que $\widehat{BCH'} = \widehat{C'CB}$ est complémentaire de \widehat{ABC} , tandis que \widehat{ACB} est complémentaire de $\widehat{B'BC} = \widehat{CBH'}$ et on gagne en

additionnant (cette démonstration reprend, en fait, la première).

Bref, quelle que soit l'option choisie, elle mène au résultat, et ce avec un minimum d'outils : le théorème de l'angle inscrit, la conservation des angles par symétrie, les angles supplémentaires et complémentaires et tous ces outils ont un point commun qui fait leur charme : leur côté visuel indéniable.

Lorsqu'on dispose des angles orientés de droites (angles modulo \neq) on peut donner une démonstration mécanique qui évite toute discussion de cas de figures : on a $(H'B, H'C) = -(HB, HC) = -(HB', HC') = (HC', HB') = (AC', AB')$ (car les points A, B', H, C' sont cocycliques : $(C'A, C'H) = (B'A, B'H) = \neq/2 \pmod{\neq}$) et on arrive à l'angle (AB, AC) comme souhaité.

c) Le vecteur constant

Nous partons maintenant de l'hypothèse que l'observation attentive de la figure (notamment avec CABRI) conduit au problème suivant :

Soient Γ un cercle et B, C deux points fixes de Γ . Soient A un point variable de Γ et H l'orthocentre du triangle ABC, alors le vecteur \vec{AH} est constant.

Là, la question est de repérer à quoi ce vecteur peut bien être égal. Quelle que soit la façon d'aborder la question (et cela dépend de chaque individu : c'est là qu'il faut faire preuve d'autonomie, cf. G5), il y a toujours une difficulté : c'est la noble incertitude de la géométrie. On peut se dire, par exemple (cf. G2) : qu'est ce qu'on a de fixe au départ ? La réponse est simple : le cercle et son centre O et les points B et C. Le vecteur constant \vec{AH} doit donc s'exprimer avec ces objets. De fait, il apparaît comme le double du vecteur \vec{OI} , où I désigne le milieu de [BC], cf. figure 2.2.

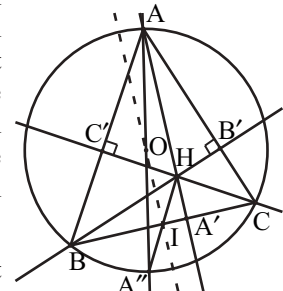


Figure 2.2

Si l'on ne voit rien *a priori* on peut aussi utiliser à nouveau le logiciel et la même réponse se voit assez facilement dans le cas particulier où le triangle ABC est rectangle en B (ou en C). En effet, on a alors $H = B$ et O est milieu de [AC], de sorte qu'on a $\vec{AB} = 2\vec{OI}$ grâce à la droite des milieux de ABC.

Cette apparition de la droite des milieux donne d'ailleurs une piste pour la solution dans le cas général. En effet, la droite (OI), qui est la médiatrice de [BC], est perpendiculaire à (BC), donc elle est bien parallèle à (AA') . Si on introduit le point A'' , symétrique de A par rapport à O, l'égalité vectorielle conjecturée sera donc vraie si (OI) est une droite des milieux du triangle $AA''H$, c'est-à-dire si I est aussi le milieu de $[A''H]$ (ou simplement s'il appartient à $(A''H)$). Nous allons effectivement prouver ce fait ci-dessous.

d) La symétrie centrale

La remarque essentielle, cf. figure 2.3, c'est que $CHBA''$ est un parallélogramme (le triangle ACA'' est rectangle en C, donc (CA'') est perpendiculaire à (AC) donc

parallèle à (BH) et de même de l'autre côté). On voit donc que I est bien le milieu de [HA'] comme souhaité en b) ce qui complète la solution du problème par la voie des translations. Mais, cette propriété signifie que la symétrie de centre I échange donc H et A''. Comme A'' est sur Γ , on voit que H est sur le cercle symétrique de Γ par rapport à I qui n'est autre, une fois encore, que Γ ! Autrement dit, le fait que I soit le milieu de [A''H] qui était un lemme pour la voie de la translation est devenu une solution à part entière pour celle de la symétrie centrale⁽⁸⁾.

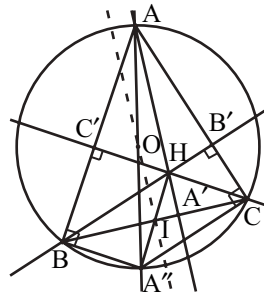


Figure 2.3

Notons qu'on retrouve aussi le point b) par cette voie. En effet, on passe de A'' à H' par la composée de la symétrie par rapport à I et de la symétrie par rapport à (BC), c'est-à-dire par la symétrie par rapport à la perpendiculaire à (BC) en I : la droite (OI) où O désigne toujours le centre du cercle circonscrit. Comme le cercle est invariant dans cette symétrie, il en résulte que H' est sur Γ .

(On peut aussi invoquer tout simplement la droite des milieux de HA''H' pour affirmer que l'angle $\widehat{A''H'H}$ est droit, de sorte que le triangle AA''H' est inscrit dans le cercle de diamètre [AA'']).

e) Droite et cercle d'Euler

Si l'introduction des points A'' et I n'était pas évidente, l'intérêt de la configuration ainsi obtenue, c'est qu'elle mène très rapidement à deux résultats classiques : la droite et le cercle d'Euler. Nous donnons ici pour le plaisir la jolie démonstration de ces faits que nous a communiquée Georges Lion. On note G le centre de gravité de ABC, cf. figure 2.4.

Considérons le triangle AHA''. On a vu que [AI] en est une médiane (car I est le milieu de [HA'']). Comme c'est aussi une médiane de ABC et que le centre de gravité est au tiers de la médiane, cela montre que G est aussi le centre de gravité de AHA''. Mais, [HO] est aussi une médiane de AHA'', de sorte que O, G, H sont alignés et, plus précisément que G est au tiers de [OH] à partir de O : voilà pour la droite d'Euler⁽⁹⁾.

Soit maintenant α le milieu de [AH] et considérons le cercle γ de diamètre [α I]. Comme $\alpha A'I$ est rectangle en A', le point A' est sur γ . Par ailleurs, comme (α I) est une droite des milieux de AHA'', (α I) est parallèle à (AA'')

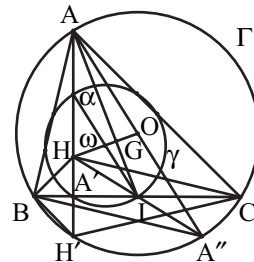


Figure 2.4

(8) Bien entendu, si on pense dès le début à la symétrie centrale (et il peut suffire pour cela de nommer le point I) le détour par la translation est inutile.

(9) Bien entendu, il y a beaucoup d'autres preuves de ce fait, mais celle ci a le mérite de l'économie de moyens. On peut aussi établir l'égalité vectorielle : $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OH} (= 3\vec{OG})$ ou utiliser les homothéties, cf. [Ro].

et elle coupe la médiane $[OH]$ en son milieu ω , qui est le centre de γ (Thalès, ou une homothétie, ou le fait que αHIO est un parallélogramme, toujours grâce à la droite des milieux). On voit ainsi que le centre du cercle d'Euler est aligné avec O, G, H . De plus, le rayon de γ vaut $OA/2 = OB/2 = OC/2$. Un raisonnement analogue en permutant les points A, B, C fournit un cercle de même centre (puisque c'est le milieu de $[OH]$) et de même rayon (puisque on a $OA = OB = OC$), et on a donc les 9 points usuels du cercle d'Euler γ : les pieds des hauteurs, les milieux des côtés et les milieux des segments joignant l'orthocentre aux sommets.

f) Conclusion

On voit que le résultat initial est susceptible de multiples approches. Celle évoquée en b) est très simple : une fois qu'on a vu la symétrie par rapport à (BC) , il n'y a plus besoin d'imagination, il suffit de mettre en œuvre quelques principes. L'autre approche est peut-être moins immédiate mais en contrepartie on a vu qu'elle permet de retrouver très vite la droite et le cercle d'Euler : en géométrie l'effort est toujours récompensé.

3. Carré et triangles équilatéraux

a) L'énoncé

Soit $ABCD$ un carré. On construit à l'intérieur de $ABCD$ (resp. à l'extérieur) le triangle équilatéral ABE (resp. BCF). Démontrer que les points D, E, F sont alignés.

Là encore, il s'agit d'un problème très classique pour lequel plusieurs approches sont possibles, chacune ayant son charme. On se reportera à la figure 3.1.

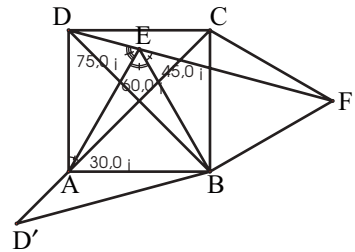


Figure 3.1

b) Rotations

On peut manifestement envisager beaucoup de rotations dans la situation proposée, d'angles $30, 45, 60$ ou 90 degrés. Notre critère de sélection est de choisir une rotation dont on puisse préciser l'effet sur un maximum de points de la figure, et notamment sur les points D, E, F qui nous intéressent. En ce sens, la rotation ρ de centre B et d'angle $\left(\vec{BF}, \vec{BC}\right)$ (soit 60°) est intéressante, puisqu'elle envoie F sur C et E sur A .

Comme une rotation conserve l'alignement, si on pose $D' = \rho(D)$, il nous suffit de voir que les points C, A, D' sont alignés. Comme la droite (AC) est la médiatrice de $[BD]$, il reste à voir que D' est lui aussi équidistant de B et D . Cela résulte du fait que le triangle isocèle en B, BDD' , a un angle de 60° , donc est équilatéral.

c) Longueurs

Pour démontrer que D, E, F sont alignés il suffit de démontrer l'égalité $DF = DE + EF$. Si on appelle a la longueur du côté du carré, on a $EF = a\sqrt{2}$ par Pythagore dans

BEF et $DE = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$, $EF = a\sqrt{2+\sqrt{3}}$ par la formule d'Al-Kashi dans DAE et DCF. On conclut en montrant la jolie formule :

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{2}$$

par élévation au carré⁽¹⁰⁾.

d) Complexes

En choisissant B comme origine, A comme point d'affixe -1 et C comme point d'affixe i on voit que D, E, F ont pour affixes respectives $-1+i$, j et $-j^2$ et on conclut par un calcul sans malice. On peut aussi utiliser un repère (par exemple celui proposé ici) et faire un calcul analytique.

e) Angles

Nous avons gardé pour la fin la méthode la plus simple : on calcule les angles en E. On a $\widehat{DEA} = 75^\circ$, $\widehat{AEB} = 60^\circ$, $\widehat{BEF} = 45^\circ$ et comme la somme vaut 180° , les trois points D, E, F sont alignés.

f) Conclusion

Comme d'habitude, il n'y a pas qu'une méthode qui conduit à la solution. Tout de même, la voie du calcul des angles présente de multiples avantages :

- Elle nécessite très peu de connaissances (les notions de complémentaire, le triangle isocèle et la somme des angles du triangle) et peut donc être utilisée dès le collège.
- Par rapport aux méthodes c) et d) les calculs sont nettement plus simples.
- Par rapport à la méthode des transformations il n'y a pas cette nécessité de trouver « la » transformation adaptée au problème.

4. Les segments décalés

a) L'énoncé

Soit ABC un triangle. Construire des points $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ de sorte que les droites (BC) et (MN) soient parallèles et qu'on ait l'égalité de longueurs $AN = MB$.

b) Application des principes

Nous mettons en œuvre explicitement sur cet exemple plusieurs des pistes expliquées au paragraphe 1.

- G2 : *Qu'est-ce qu'on cherche ?*

Ici, ce sont les points M et N, ou encore la droite (MN) et construire sous-entend à la règle et au compas (ou en se ramenant à des constructions usuelles, même si on ne va pas jusqu'au bout).

- G3 : *Des simplifications ?*

Ici, comme on a la direction (MN), un point de cette droite suffit pour la déterminer (c'est l'idée qu'une droite du plan est donnée par deux conditions). Il suffit donc de

(10) C'est l'occasion de faire un petit calcul non gratuit sur les racines carrées !

trouver M ou N ou un autre point de (MN) (le milieu de [MN] par exemple), ou encore un point bien déterminé à partir de M, N par une construction supplémentaire qui permet de les récupérer (cf. c) et d)).

• G1 : *Faire une figure d'analyse.*

C'est une étape fondamentale dans tout problème de construction. Parfois cela suffit à donner la solution. Il ne faut pas hésiter à faire des dizaines de figures, à les recommencer autant de fois qu'il est nécessaire ou à faire appel à un logiciel de géométrie. Bien entendu, ici, on ne peut faire la figure à partir du triangle donné ABC (sinon c'est que le problème est résolu). On peut s'en tirer par deux procédures :

– La première, qui sera peut-être plus naturelle pour les élèves, consiste à procéder par tâtonnement, c'est-à-dire, mathématiquement, par approximations successives. Voici une méthode qui fonctionne bien lorsque les longueurs AB et AC ne sont pas trop différentes. On part d'un point N_0 arbitraire de [AC], on construit M_0 sur [AB] tel que $BM_0 = AN_0$ et on trace la parallèle à (BC) passant par M_0 . Elle recoupe [AC] en N'_0 , *a priori* distinct de N_0 . On remplace alors N_0 par le milieu N_1 de $[N_0 N'_0]$ et on recommence. Le procédé donne rapidement une solution approximative satisfaisante.

– L'autre procédure mérite de faire l'objet d'un apprentissage spécifique qui sera réinvesti dans la plupart des problèmes de construction. Elle consiste à tricher en partant à l'envers, c'est-à-dire en construisant M et N avant certains des points A, B,

C ! Par exemple on peut tracer un angle \hat{A} , porter dessus M et N n'importe comment puis reporter AN à partir de M, d'où le point B. On trace alors (BC) comme parallèle à (MN). En fait on verra que ce premier travail conduit à plusieurs des solutions, celles appelées « abandon de contraintes » ou « modèles ».

• G5 : *Faire preuve d'initiative et d'autonomie.*

Dans notre cas cela peut signifier :

– Faire des constructions supplémentaires. Ici, l'un des problèmes que pose la configuration est que les segments égaux [AN] et [BM] sont « trop éloignés » et l'idée peut être de les rapprocher pour construire un parallélogramme ou un triangle isocèle. Ce point illustre l'importance d'une heuristique pour guider la recherche.

– Abandonner certaines contraintes de l'énoncé et traiter un problème plus simple, quitte à revenir ensuite au problème initial. C'est déjà ce qu'on fait en construisant la figure d'analyse comme expliqué ci-dessus.

• G4 : *Le jeu des associations d'idées.*

Les termes de l'énoncé peuvent avoir les échos suivants (il y en a d'autres, on se contente d'indiquer ici les plus plausibles) :

- parallèle \mapsto parallélogramme,
- parallèle \mapsto Thalès,
- parallèle \mapsto homothétie,
- longueurs égales \mapsto isométrie,
- longueurs égales \mapsto symétrie, etc.

De plus, au cours de la recherche, d'autres idées pourront apparaître, selon les procédures utilisées. On verra ainsi surgir la droite des milieux, les angles alternes-internes, le triangle isocèle, etc.

• M3 : *Les liens de la géométrie et du calcul.*

Il ne faut jamais oublier le calcul : cf. f) ci-dessous.

c) Rapprocher les segments : les parallélogrammes

Le principe de ces solutions est le même et suppose une manœuvre en deux temps :
1) on effectue, sur la figure d'analyse, une construction supplémentaire (ici guidée par l'association d'idées parallèle-parallélogramme et l'idée de « rapprocher » les segments $[AN]$ et $[BM]$), on introduit donc de nouveaux points,
2) on analyse la figure ainsi construite, l'idée étant de construire d'abord les nouveaux points, puis les points cherchés.

Précisément on construit les parallélogrammes $MNN'B$ (cf. figure 4.1) ou $MNAA'$ (cf. figure 4.2)⁽¹¹⁾. On a alors un triangle isocèle NAN' ou $MA'B$. Dans le premier cas (AN') est la bissectrice de \hat{A} (pour cause d'angles alternes-internes) et on construit N' , donc N . Dans le second, $(A'B)$ coupe (AC) en B' et ABB' est isocèle (pour cause d'angles correspondants). Cela permet de construire successivement B' puis A' , puis M .

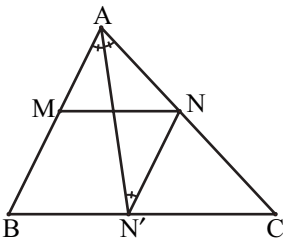


Figure 4.1

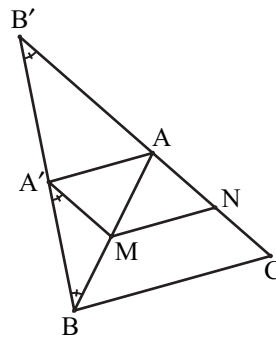


Figure 4.2

On voit que la seconde solution est un peu plus compliquée mais que l'élève qui aurait eu cette idée peut toutefois s'en sortir (à condition de penser à prolonger (AC)). Dans les deux cas, ces solutions, qui reposent sur l'utilisation de l'invariant angle et sur les propriétés des triangles isocèles et des parallèles peuvent être abordées au collège.

d) Rapprocher les segments : la symétrie

La démarche est très voisine de la précédente : on utilise une construction supplémentaire et l'analyse de la figure obtenue. L'idée de départ est encore de rapprocher les deux segments égaux en les mettant cette fois-ci sur la même droite et pour cela de construire le point N' symétrique de N sur le côté (AB) (symétrie par

(11) Il y a sans doute d'autres possibilités encore !

rapport à la bissectrice AA'' de \hat{A}). L'intérêt de cette opération est qu'on a une traduction commode de l'égalité $AN' = BM$ en disant que $[AB]$ et $[N'M]$ ont même milieu, le point C' , qui est un point connu puisque milieu de $[AB]$. La conjonction des mots « parallèle » et « milieu » doit amener à penser à la droite des milieux.

Soit alors K le milieu de $[NN']$, cf. figure 4.3. Ce point est sur (AA'') . De plus la droite $(C'K)$ est une droite des milieux du triangle $N'MN$. Elle est donc parallèle à (MN) donc à (BC) et on construit ainsi K , donc aussi N .

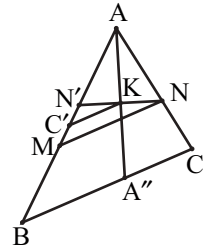


Figure 4.3

Une variante de cette solution consiste à noter que la connaissance du milieu P de $[MN]$ permet de faire la construction. Or, par Thalès on sait déjà que ce milieu est sur la médiane (AA') . Par ailleurs, la droite $(C'P)$ est une autre droite des milieux de MNN' . Elle est donc parallèle à (NN') ou encore perpendiculaire à la bissectrice (AA'') . On construit ainsi P , donc M et N , cf. figure 4.4.

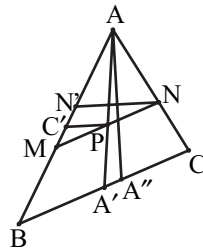


Figure 4.4

Ces deux solutions sont élémentaires, même si elles ne sont pas évidentes. Elles sont là pour illustrer le fait que toute idée intelligente et convenablement exploitée peut aboutir.

e) Les solutions par abandon de contrainte ou solutions d'après modèle

On a expliqué ci-dessus comment faire une figure d'analyse, où les constructions ne sont pas effectuées dans le triangle donné ABC , mais dans un autre. Appelons ce triangle $A'B'C'$ et les points construits M' , N' . On a ainsi abandonné une des contraintes de l'énoncé : faire la construction dans ABC . L'idée est d'utiliser cette figure $A'B'C'$, M' , N' comme modèle pour récupérer ABC , M , N . Il s'agit donc de transporter $A'B'C'$ sur ABC par une transformation f qui enverra M' et N' sur M et N , mais, pour que M et N vérifient les conditions imposées, il faut conserver l'alignement, le parallélisme et les égalités de longueurs, de sorte que f doit être une similitude. Si on a construit $A'B'C'$ n'importe comment c'est impossible car ce triangle n'est pas semblable à ABC : on peut abandonner des contraintes, certes, mais pas trop. Il faut donc faire la construction $A'B'C'$, M' , N' en conservant les angles ce qui est possible de multiples manières.

On peut par exemple partir de l'angle \widehat{BAC} donné, porter M' sur (AB) , tracer $(M'N')$ parallèle à (BC) , puis reporter B' de sorte que $AN' = M'B'$ et C' tel que $(B'C')$ soit parallèle à (BC) . Dans ce cas ABC se déduit de $A'B'C'$ par une homothétie de centre A , d'où la construction, cf. figure 4.5. On notera qu'on peut aussi résoudre le problème en utilisant Thalès, sans parler d'homothéties, mais la démarche est peut-être un peu moins naturelle.

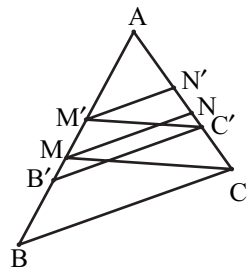


Figure 4.5

On peut aussi partir de l'angle \widehat{ABC} , porter M' n'importe comment sur $[BA]$, prendre $N'' \in [AC]$ tel que $(M'N'')$ soit parallèle à (BC) , puis $A'' \in [N''A]$ tel que $A''N'' = M'B$. La parallèle à (BC) passant par A'' recoupe $[AB]$ en A' et on obtient un triangle $A'BC'$ convenable, homothétique de ABC dans une homothétie de centre B cette fois, cf. figure 4.6.

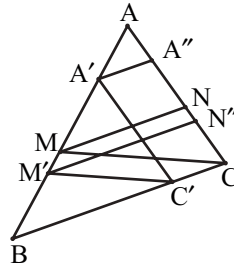


Figure 4.6

Il est sans doute possible de produire d'autres solutions fondées sur ce principe, qui est d'un usage assez universel dans ce genre de questions. (Par exemple, on peut ainsi construire un carré inscrit dans un triangle donné.) Ces solutions se conçoivent mieux en utilisant les transformations, notamment homothéties et similitudes, de sorte qu'elles sont plus adaptées à des élèves de lycée.

f) Par le calcul

Un calcul élémentaire permet de trouver une solution, peut-être plus simple encore que toutes les autres. On calcule la longueur cherchée AN en fonction des longueurs connues. Pour cela on écrit Thalès (quoi de plus

naturel quand il s'agit de parallèles) : $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB}$ et

on tient compte de $AM = AB - BM = AB - AN$. Un

petit calcul donne alors $\frac{AN}{AC} = \frac{AB}{AB + AC}$. La

construction est immédiate par Thalès en prolongeant $[AB]$ de la longueur AC c'est-à-dire en construisant D tel que $BD = AC$. Le point N est sur la parallèle à (CD) passant par B , cf. figure 4.7. Cette technique de construction est bien connue. On parlait jadis de la construction d'une quatrième proportionnelle.

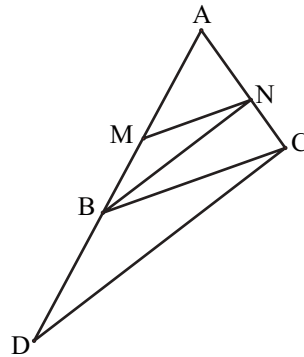


Figure 4.7

Ce qui milite en faveur de cette solution c'est qu'elle ne requiert qu'une idée, celle de **calculer** la longueur cherchée, ici AN . Une seule idée, mais souvent fondamentale en matière de constructions. Outre cette idée, la solution ne requiert qu'un peu de technique : Thalès et la construction de la quatrième proportionnelle.

g) Les transformations

Pour terminer voici deux solutions qui utilisent directement les transformations, l'idée étant de repérer une transformation qui conserve certains éléments de la figure et de construire cette transformation (en en précisant les caractéristiques). La première solution a été proposée par un élève de première S.

Comme on a $AN = BM$ on peut trouver une rotation r qui transforme A en B et N en M . Si O est le centre de cette rotation, O est sur la médiatrice de $[AB]$. Par ailleurs,

si on pose $D = r(C)$, D est sur la droite (AB) , du côté de A par rapport à B et on a $AC = BD$. Comme O est aussi sur la médiatrice de CD , le voilà déterminé. L'angle de la rotation est alors $\theta = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD} \right)$ et on construit M et N inclinés de $\pm \theta/2$ à partir de la perpendiculaire à (BC) passant par O , cf. figure 4.8⁽¹²⁾.

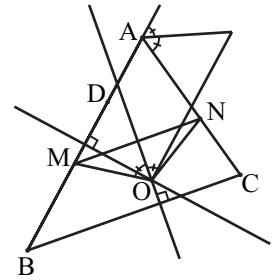


Figure 4.8

Une variante de cette solution, un peu plus tordue, est la suivante. En fait, il y a deux isométries (et deux seulement) qui envoient A sur B et N sur M . Outre la rotation vue ci-dessus, il y a une isométrie négative qui est en général un glissement, c'est-à-dire une transformation f qui peut s'écrire comme composée d'une symétrie d'axe D et d'une translation de vecteur parallèle à D . Une propriété géométrique de cette transformation est que les milieux des segments $[Mf(M)]$ sont sur D .

Pour déterminer f on commence par envoyer A sur B par la translation de vecteur

\overrightarrow{AB} dans laquelle le point N vient en N' , puis on effectue une symétrie d'axe Δ qui envoie N' sur M . La droite Δ est la perpendiculaire à la bissectrice de \hat{A} , passant par B . Il n'y a plus qu'à écrire

ce glissement sous forme canonique $\tau_{\vec{v}} \circ \sigma_D$ avec \vec{v}

colinéaire à D en décomposant le vecteur \overrightarrow{AB} en composantes perpendiculaire et parallèle à Δ . La droite D est translatée de Δ par une translation dont le vecteur est la moitié de \overrightarrow{BA} . Le milieu P de $[MN]$ est alors sur D et sur la médiane AA' comme il a déjà été dit, cf. figure 4.9.

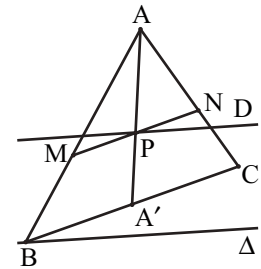


Figure 4.9

Cette solution est bien compliquée et ne présente pas de réel intérêt. Elle permet toutefois d'illustrer un principe que l'on enseigne au joueur d'échecs débutant et qui pourrait valoir aussi pour l'apprenti géomètre : *si tu vois un bon coup, ne le joue pas, il y en a sans doute un meilleur*. Ainsi, cette solution conduit tout droit à celle de la figure 4.4 (le lecteur constatera que les solutions des figures 4.4 et 4.9 sont identiques), puis à celle de la figure 4.3 ! Les voies de la découverte sont parfois impénétrables.

h) Conclusion

Il est fascinant de constater que la plupart des idées que l'on peut produire sur ce problème conduisent à des solutions. Il suffit souvent d'avoir un peu de technique et beaucoup de persévérance. Cela étant, comme il a été dit, toutes les méthodes ne sont

(12) Cette solution est celle proposée par l'élève en question. Comme Henri Bareil nous l'a fait remarquer on peut aussi noter que le point O est sur une bissectrice de \hat{A} (mais il faut préciser laquelle).

pas d'un égal intérêt. Cet intérêt est d'ailleurs fonction du niveau auquel on place l'exercice, ainsi les méthodes par construction de parallélogrammes conviennent dès la classe de cinquième. Outre ces solutions, notre préférence va aux méthodes de calcul et d'abandon de contraintes, pour leur portée universelle.

5. Le carré et les losanges

a) L'énoncé

On donne un segment $[CF]$ (ou sa longueur). Le but de l'exercice est de reconstituer la figure 5.1, c'est-à-dire de construire les points A, B, D, E, G tels que A soit sur $[CF]$, que $ABCD$ soit un carré et que $ADEF$ et $ABGF$ soient des losanges.

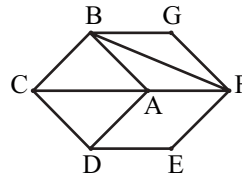


Figure 5.1

b) Application des principes

• G1 : *Faire une figure d'analyse.*

Si l'on n'impose pas le segment $[CF]$, la construction ne pose pas de problème : on construit le carré $ABCD$, puis les losanges. Si l'on a compris le principe d'abandon de contraintes on se doute déjà qu'on va pouvoir s'en emparer ici !

• G2 : *Qu'est-ce qu'on cherche ?*

Les points C et F étant donnés, on constate que n'importe lequel des autres points (par exemple A ou B) suffit à déterminer le reste de la figure. Il suffit donc de construire (à la règle et au compas) le point A ou le point B . Notons que si on prend A quelconque sur $[CF]$ on peut toujours construire le carré $ABCD$ de diagonale $[AC]$, mais que pour construire les losanges il faut avoir $AB = AD = AF$.

• G3 : *Des simplifications ?*

En fait, on peut simplifier notablement la figure : les points E et G ne servent à rien pour la construction et on peut se contenter de considérer une des moitiés de la figure par rapport à (CF) . Il suffit donc de résoudre le problème suivant :

On se donne le segment $[CF]$. Construire un point $A \in [CF]$ et un point B tel que le triangle ABC soit rectangle isocèle en B et le triangle BAF isocèle en A .

Dans ce qui suit nous utiliserons cette forme simplifiée, mais il est aussi tout à fait possible de conserver le problème initial (les constructions sont alors faites en double).

• M3 : *Le calcul.*

L'idée, très simple, pour reconstruire la figure, est de partir de la figure d'analyse (simplifiée) et d'en calculer sinon tous les invariants (longueurs, angles), du moins suffisamment pour déterminer A ou B .

Côté longueurs, on a $AB = AF = BC$ et $AC = \sqrt{2} AB$ (Pythagore). Tout le problème

est donc de construire A sur $[CF]$ de telle sorte qu'on ait $AF = \frac{CF}{1 + \sqrt{2}}$.

Côté angles, on connaît tous les angles de la figure : $\widehat{BAC} = \widehat{BCA} = 45^\circ$, $\widehat{BAF} = 135^\circ$ et $\widehat{BFA} = 22,5^\circ$. Dans ce cas, c'est le point B qui va être le plus commode à construire.

e) Solution par abandon de contraintes

On fait une figure en partant du point C, en portant A' n'importe où sur la demi-droite [CF) et en construisant un triangle rectangle isocèle CB'A' (ou un carré A'B'CD' si l'on préfère). On reporte ensuite A'F' = A'B' sur (CF) (avec A' entre C et F') et on obtient une figure qui, si elle n'est pas celle demandée car F' n'a aucune raison d'être en F, lui est toutefois homothétique, dans l'homothétie de centre C et de rapport CF'/CF. Il reste à construire l'image de A' par homothétie inverse pour obtenir le point A cherché, cf. figure 5.2.

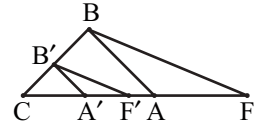


Figure 5.2

d) Par le calcul

Il suffit de construire la longueur

$$AF = \frac{CF}{1 + \sqrt{2}} = (\sqrt{2} - 1)CF.$$

C'est très facile en construisant un carré de côté CF, cf. figure 5.3.

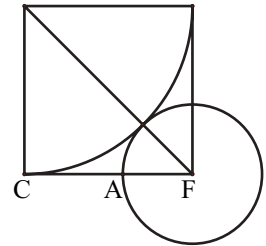


Figure 5.3

e) Par les angles

On construit les demi-droites [Cx) et [Fy), dans le même demi-plan limité par (CF), de sorte qu'on ait les angles $\widehat{FCx} = 45^\circ$ et $\widehat{CFy} = 22,5^\circ$. Par exemple, on peut pour cela construire le triangle rectangle isocèle d'hypoténuse [CF] et tracer la bissectrice de l'angle \hat{F} . Le point B est à l'intersection de [Cx) et [Fy), cf. figure 5.4.

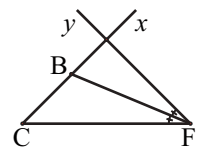


Figure 5.4

Remarque. Nous laissons au lecteur une variante intéressante du problème que nous a signalée la Commission du Bulletin et qui consiste à autoriser A à être n'importe où sur la droite (CF) (et pas seulement sur [CF]).

6. Exemples d'utilisation des cas d'isométrie et de similitude

a) Fondements théoriques

L'une des critiques importantes qu'on peut faire à la réforme des mathématiques modernes, s'agissant de la géométrie, concerne l'abandon des cas d'isométrie et de similitude des triangles. Nous rappelons ici, en suivant [R], leur justification théorique.

Un problème crucial qu'on rencontre lorsqu'on travaille avec un groupe de transformations G d'un ensemble X est de dire si G est transitif, c'est-à-dire si on peut transformer n'importe quel élément de X en n'importe quel autre par l'action du groupe⁽¹³⁾. Par exemple, dans le plan, le groupe des isométries opère transitivement sur l'ensemble des points. Il est aussi transitif sur l'ensemble des demi-droites, puisqu'on peut commencer par transporter une origine sur l'autre par translation, puis effectuer une rotation pour amener une demi-droite sur la deuxième. En revanche, il n'est pas transitif sur l'ensemble des segments, ou sur l'ensemble \mathcal{D} des couples de demi-droites de même sommet.

Lorsque le groupe n'est pas transitif, l'objectif est de décrire ses orbites, c'est-à-dire de donner un critère commode pour savoir si deux éléments peuvent ou non être transportés l'un sur l'autre, sans être obligé d'exhiber la transformation qui fait effectivement le travail. Beaucoup d'invariants géométriques peuvent s'interpréter en ces termes de description d'orbites, en visant un théorème du genre :

Deux éléments de X peuvent être échangés par l'action de G (i.e. sont dans la même orbite) si et seulement si certains de leurs invariants sont les mêmes.

Par exemple, deux segments peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même longueur. Deux couples de demi-droites peuvent être échangés par le groupe des isométries si et seulement si ils ont même angle.

Or, que font les cas « d'égalité » des triangles ? Ils décrivent exactement les orbites du groupe des isométries dans son action sur les triangles en donnant des critères commodes qui permettent d'affirmer l'existence d'une isométrie échangeant deux triangles (avec comme conséquence l'égalité des autres éléments que ceux utilisés) **sans être obligé, comme c'est le cas actuellement, d'exhiber celle-ci.**

Nous allons donner des exemples de cette situation ci-dessous en espérant convaincre le lecteur de l'efficacité des cas d'isométrie des triangles, par rapport à l'usage direct des transformations. En vérité, dans le plan, comme on connaît toutes les isométries, il est souvent assez facile de repérer laquelle employer. En revanche, ce qui est plus délicat c'est de prouver qu'elle fait bien ce qu'on suppose. On y arrive, mais c'est souvent lourd et, presque toujours, inutile.

Le même argument vaut évidemment pour les similitudes, avec, dans ce cas, deux avantages :

- le critère (notamment celui avec deux angles égaux) est d'une simplicité biblique,
- on connaît encore toutes les similitudes planes mais c'est déjà nettement plus compliqué de repérer celle qui va faire le travail que dans le cas des isométries.

b) Exemple 1^(*)

Soit ABC un triangle isocèle de base $[BC]$. La médiatrice de $[AC]$ coupe (BC) en D que l'on suppose extérieur à $[BC]$. On trace (AD) et on porte une longueur $AE = BD$ sur (AD) , de l'autre côté de A par rapport à D . Démontrer que CDE est isocèle.

(13) On se reportera au paragraphe 8 pour une autre illustration de l'intérêt de ce type de résultat de transitivité.

(*) N.D.L.R. : Ce problème est également traité dans l'article de J.-P. Richeton relatif à la Seconde.

Avec un peu de pratique des cas d'isométrie, et guidé par les égalités de longueurs $AB = CA$ et $BD = AE$, on conjecture, cf. figure 6.1, que les triangles ADB et CEA sont isométriques et on le montre en utilisant le premier cas d'isométrie. En effet, il reste à voir l'égalité d'angles $\widehat{ABD} = \widehat{CAE}$. Mais ces angles ont même supplémentaire en vertu des égalités $\widehat{CAD} = \widehat{DCA} = \widehat{CBA}$ qui résultent du fait que les triangles ABC et DCA sont isocèles en A et D respectivement.

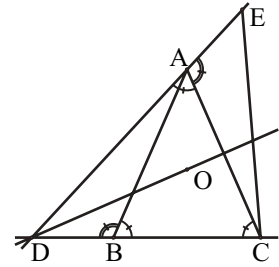


Figure 6.1

L'isométrie des triangles donne alors l'égalité des angles \widehat{CEA} et \widehat{ADB} , d'où la conclusion.

Dans cet exemple, il n'est pas difficile non plus de repérer la transformation pertinente : il s'agit de la rotation ρ de centre O (centre du cercle circonscrit à ABC) et d'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$, qu'on peut encore voir comme composée des symétries d'axes (OA) et (OD) si l'on préfère. Ce n'est pas difficile, mais il faut déjà le voir (surtout si le point O n'est pas dessiné sur la figure de départ !). De plus, de quelque manière qu'on prenne les choses, il n'est pas tout à fait évident de démontrer qu'on a bien $\rho(D) = E$ (il faut utiliser l'égalité des angles \widehat{DBA} et \widehat{EAC} , comme lorsqu'on utilise le cas d'isométrie, mais en faisant attention à leur sens). On conclut de la même façon.

Cet exemple illustre bien l'avantage d'utiliser les cas d'isométrie : il n'est pas besoin d'expliciter la transformation adéquate, ni de montrer qu'elle fait bien ce qu'on pense.

c) Exemple 2

Soit ABC un triangle. On suppose que les hauteurs BB' et CC' sont « égales ». Démontrer que ABC est isocèle.

On montre que les triangles ABB' et ACC' sont isométriques (ils ont deux angles et un côté égaux). On en déduit l'égalité $AB = AC$.

Une variante consiste à utiliser le cas d'isométrie des triangles rectangles qui permet de démontrer que les triangles rectangles $BC'C$ et $CB'B$ sont isométriques et on conclut par l'égalité des angles à la base du triangle ABC , cf. figure 6.2⁽¹⁴⁾.

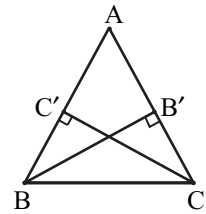


Figure 6.2

On peut aussi arriver au résultat en utilisant directement les transformations, mais c'est plus ardu. En effet, il est clair que la figure est symétrique par rapport à la médiatrice de $[BC]$, mais ce n'est pas tout à fait évident à démontrer. Voilà une façon de le faire. On appelle σ cette symétrie. On a $\sigma(B) = C$. On considère le demi-cercle

(14) Une solution alternative encore plus simple est de calculer l'aire du triangle de deux manières en utilisant les bases AB et AC !

de diamètre $[BC]$. Il est invariant par σ et contient B' et C' . D'autre part, par σ , les cercles de centres B et C et de rayon BB' et CC' s'échangent. On en déduit qu'on a $\sigma(B') = C'$. L'orthocentre du triangle est alors fixe par σ donc est sur la médiatrice de $[BC]$ qui est donc aussi hauteur et on a gagné, mais c'est un peu lourd, non ?

d) Exemple 3

Il s'agit de ce que nos amis Suisses appellent le théorème de Thalès (vérité en deçà du Jura, erreur au delà !), c'est-à-dire le résultat très élémentaire suivant, cf. figure 6.3 : Soit ABC un triangle rectangle en A et AH la hauteur issue de A . Alors on a l'égalité $AH^2 = BH \times CH$.

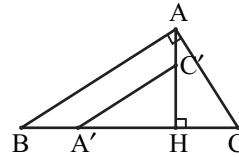


Figure 6.3

Une démonstration de ce résultat par les transformations est possible : on effectue d'abord une rotation de centre H et d'angle $\neq 2$ qui amène A en $A' \in (BC)$ et C en $C' \in (AH)$. Les droites (AB) et $(A'C')$ sont alors parallèles, on a $AH = A'H$ et $CH = C'H$ et on conclut par Thalès (le nôtre) ou une homothétie. Pour montrer le parallélisme, si l'on ne dispose pas de la transformation vectorielle associée à la rotation, on utilise un argument d'angles : on a $\widehat{HAC} = \widehat{HBA}$ (même complémentaire) et $\widehat{HAC} = \widehat{HA'C'}$ (conservation de l'angle par rotation), de sorte que les angles en B et A' sont « correspondants » et on en déduit le parallélisme. Cette méthode, tout à fait correcte, présente cependant deux défauts. D'abord, elle nécessite une construction supplémentaire et cela n'est jamais facile pour les élèves, ni peut-être pour les professeurs. Ensuite, pour montrer le parallélisme, on passe par l'égalité d'angles $\widehat{HAC} = \widehat{HBA}$. Mais cette seule égalité d'angles donne à elle seule le résultat, soit qu'on invoque la similitude des triangles ABH et CAH (deux angles égaux), soit, ce qui revient essentiellement au même, qu'on écrive l'égalité des tangentes des angles \widehat{CAH} et \widehat{ABH} .

Cet exemple illustre donc clairement l'intérêt de l'usage des invariants et/ou des cas de similitude.

Un joli prolongement de cet exercice est le suivant :

Soit ABC un triangle rectangle en A , AH la hauteur issue de A , O le milieu de $[BC]$ et K le projeté orthogonal de H sur (OA) . On pose $HB = b$, $HC = c$. On note m la moyenne arithmétique de b et c , p leur moyenne géométrique et q leur moyenne harmonique. On a donc :

$$2m = b + c, p^2 = bc \text{ et } \frac{2}{q} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Démontrer qu'on a : $m = AO$, $p = AH$ et $q = AK$ et en déduire l'inégalité $q \leq p \leq m$. (Seul le cas de la moyenne harmonique reste à examiner. On montre, en utilisant la similitude des triangles AOH et AHK ou le cosinus de \widehat{OAH} , la relation $AK \times AO = AH^2$, on en déduit

$$AK = \frac{AH^2}{AO} = \frac{2HB \times HC}{HB + HC}$$

et le résultat s'ensuit. La double inégalité est évidente en regardant les triangles rectangles AOH et AHK, cf. figure 6.4.)

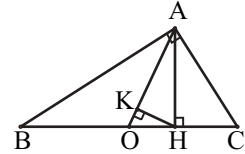


Figure 6.4

e) Exemple 4

Soit Γ un cercle de centre O et de rayon R et A un point non situé sur Γ . Deux droites Δ et Δ' passant par A coupent respectivement Γ en B, C et B', C'. Démontrer qu'on a :

$$\overline{ABAC} = \overline{AB'AC'}$$

Ce résultat permet de définir la puissance du point A par rapport au cercle Γ qui est la quantité $p = \overline{ABAC}$, indépendante du choix de la sécante.

La démonstration est immédiate avec les cas de similitude, cf. figure 6.5. En effet, les triangles ABC' et $AB'C$ sont semblables (ils ont même angle en A et on a $\widehat{AC'B} = \widehat{ACB'}$ en vertu du théorème de l'angle inscrit). On en déduit l'égalité $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$ et

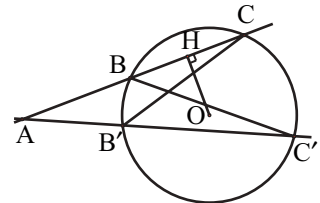


Figure 6.5

le résultat s'ensuit. On notera que la démonstration vaut encore dans le cas $B' = C'$, i.e. le cas où Δ' est tangente à Γ .

Bien entendu, il y a une autre démonstration de cette propriété qui consiste à montrer que l'on a $p = d^2 - R^2$ où d désigne la distance OA (cela correspond au cas où la sécante Δ passe par O).

En effet, si H est le projeté orthogonal de O sur Δ on a

$$\overline{ABAC} = (\overline{AH} + \overline{HB})(\overline{AH} + \overline{HC}) = (\overline{AH} + \overline{HB})(\overline{AH} - \overline{HB}) = \overline{AH}^2 - \overline{HB}^2$$

et on conclut en utilisant le théorème de Pythagore.

Cette deuxième preuve donne une précision sur la valeur de p (mais en contrepartie elle nécessite d'avoir repéré le cas particulier).

f) Exemple 5

Soit ABC un triangle isocèle en A. Une droite passant par A coupe le côté [BC] en D et le cercle circonscrit en E. Démontrer qu'on a $\overline{AD} \cdot \overline{AE} = \overline{AB}^2$. Quel est le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle BDE quand la droite (AD) varie ?

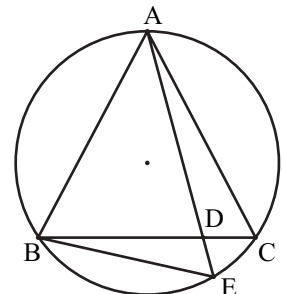


Figure 6.6

La relation est immédiate en montrant que les triangles ABD et AEB sont semblables, cf. figure 6.6. En

revanche il n'est pas évident d'exhiber la transformation qui donne le résultat. Il s'agit en effet de la similitude indirecte, composée de la symétrie d'axe la bissectrice de \widehat{BAE} et de l'homothétie de centre A et de rapport AB/AD , mais pour le voir il faut construire les points B' et D' symétriques de B et D par rapport à la bissectrice et il n'est pas encore évident de démontrer que $(B'D')$ est parallèle à (BE) (il faut utiliser l'égalité des angles \widehat{ABE} et \widehat{ADB} de toutes façons alors que cette égalité est l'unique ingrédient du cas de similitude !).

Pour la question sur le lieu du centre du cercle Γ circonscrit à BDE, on peut interpréter la quantité $\overline{AD} \cdot \overline{AE}$ comme la puissance de A par rapport à Γ , donc aussi AB^2 , et cela montre que la droite (AB) est tangente à Γ en B, de sorte que le centre de Γ est sur la perpendiculaire à (AB) passant par B.

g) Exemple 6

L'exercice suivant est un exercice classique souvent proposé en fin de collège.

Soit ABC un triangle isocèle en A, BB' la hauteur issue de B. Calculer CB' en fonction des longueurs des côtés du triangle.

Nous poserons $a = BC$, $b = AC = AB$, $x = CB'$ et nous appellerons \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} les angles du triangle, cf. figure 6.7.

Nous supposons que le point B' est dans le segment $[AC]$,

c'est-à-dire que l'angle \hat{A} est aigu. Le résultat est le même dans l'autre cas et les démonstrations sont analogues.

Il y a plusieurs voies pour aborder le problème, essentiellement en fonction du nombre de constructions supplémentaires que l'on est prêt à effectuer.

- Si l'on n'opère aucune construction on peut calculer CB' en utilisant Pythagore dans les triangles rectangles ABB' et $BB'C$ et en tenant compte de la relation $AB' + CB' = AB' + x = b$. On obtient $BB'^2 + x^2 = a^2$ et $BB'^2 + (b - x)^2 = b^2$. En remplaçant BB'^2 par sa valeur dans la deuxième relation on a donc $a^2 - x^2 + (b - x)^2 = b^2$, d'où $x = \frac{a^2}{2b}$.

Ce calcul, appuyé sur Pythagore, ne présente pas de difficulté, sauf le fait d'introduire des inconnues supplémentaires temporaires : AB' et BB' . Cela étant, cette procédure nous semble un objectif d'apprentissage important.

- Une approche très naturelle, pour calculer x est de noter qu'on $\frac{x}{a} = \sin \widehat{CBB'}$.

Posons $\alpha = \widehat{CBB'}$. Cet angle est le complémentaire de \hat{C} et deux idées peuvent permettre de parvenir à calculer son sinus :

– On a $\sin \alpha = \cos \hat{C}$. Pour calculer ce cosinus on trace la hauteur AA' et on a

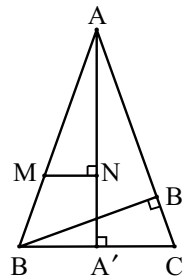


Figure 6.7

$\cos \hat{C} = \frac{CA'}{AC} = \frac{x}{a}$, d'où le résultat.

– On a $\alpha + \hat{C} = 90^\circ$, donc $2\alpha + 2\hat{C} = 180^\circ = \hat{A} + 2\hat{C}$, et cela montre que $\alpha = \frac{1}{2}\hat{A}$. On trace alors la bissectrice de \hat{A} (qui n'est autre que la hauteur, bien entendu) et on retrouve le résultat en calculant le sinus de α dans le triangle $AA'C$.

• Si on a l'idée de construire la hauteur AA' (par exemple parce que c'est l'axe de symétrie du triangle) il apparaît des triangles semblables ACA' et BCB' (ils sont rectangles et ont un angle commun en C). La conclusion est alors immédiate avec

$$\text{l'égalité } \frac{CB'}{CA'} = \frac{BC}{AC}.$$

• On peut aussi vouloir exhiber la similitude qui relie ces triangles. Pour cela il faut encore une construction supplémentaire : on construit $M \in [AB]$ tel que $AM = BC$ et on mène la parallèle à (BC) passant par M qui coupe (AA') en N . On a alors $MN = CB'$. En effet, les triangles BCB' et AMN sont isométriques (ils sont rectangles en B' et N , on a $BC = AM$ et les angles en C et M sont égaux)⁽¹⁵⁾. On a donc $MN = CB'$. On applique alors Thalès dans le triangle ABA' (ou on utilise une

homothétie de centre A), on a $\frac{MN}{BA'} = \frac{AM}{AB}$ et on retrouve le résultat.

Commentaire. Trois leçons sont à retenir de cet exemple : l'efficacité du calcul (si on en maîtrise les rudiments), l'intérêt de l'invariant angle (et des lignes trigonométriques) et l'efficacité des cas de similitude. Faute d'utiliser les bons outils, il faudra déployer des trésors d'ingéniosité pour se mettre en position de Thalès par exemple.

7. Ne jetons pas les transformations

L'objectif de ce paragraphe est de proposer quelques exemples dans lesquels les transformations sont le meilleur outil pour résoudre un problème. Quitte à nous répéter, nous tenons à réaffirmer ici que la philosophie du rapport [R] n'est pas de faire disparaître les transformations, mais de trouver un nouvel équilibre entre les diverses approches de la géométrie élémentaire : invariants, transformations, cas d'isométrie et de similitude.

a) Exemple 1

Construire un carré ABCD, de sens direct, dont le centre O est donné et tel que les points A et B soient respectivement sur deux droites données Δ_A et Δ_B .

On peut déjà noter que seuls les points O, A, B sont essentiels, les autres s'en déduisant aussitôt. De plus, il suffit de construire l'un des points A ou B.

(15) Voilà un cas où la rotation qui transporte un triangle sur l'autre n'est pas évidente !

Ici, la transformation pertinente est assez claire, cf. figure 7.1 : il s'agit de la rotation ρ de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$. En effet, cette rotation transforme A en B . Comme A est sur Δ_A , le point B sera à l'intersection de Δ_B et de $\rho(\Delta_A)$. Il suffit donc de construire la droite $\rho(\Delta_A)$, ce qui ne pose pas de problème : on construit le projeté H de O sur Δ_A et son transformé $\rho(H) = H'$ et $\rho(\Delta_A)$ est la perpendiculaire à (OH') en H' .

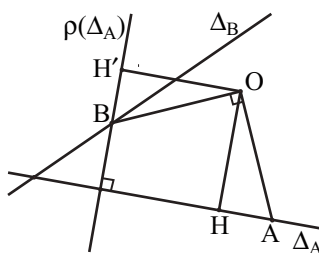


Figure 6.6

b) Exemple 2

On se donne deux droites parallèles Δ et Δ' et deux points A et B situés de part et d'autre de la bande limitée par Δ et Δ' . Construire les points $M \in \Delta$ et $M' \in \Delta'$ tels que (MM') soit perpendiculaire à Δ et qui satisfait en outre l'une des propriétés suivantes :

- i) $AM = BM'$.
- ii) (AM) perpendiculaire à (BM') .
- iii) $AM + MM' + M'B$ est minimum.

On a ici un bel exemple de problème qui se résout par abandon de contraintes : si la bande est de largeur nulle, les trois constructions sont très faciles et on se ramène à ce cas particulier au moyen de la translation qui envoie Δ sur Δ' . Bien entendu, si l'on veut éviter de parler de translation, il suffit de considérer par exemple le parallélogramme $AMM'A'$, mais c'est la même chose.

c) Exemple 3

Construire un triangle équilatéral dont les trois sommets sont sur trois cercles concentriques donnés.

(On impose le premier sommet et on utilise les rotations de $\pm \frac{\pi}{3}$.)

Il y a une multitude d'exemples que l'on peut traiter de cette façon. Le lecteur trouvera une mine de tels problèmes dans les vieux livres [DC], [RC], etc.

8. Annexe : utiliser l'esprit du programme d'Erlangen

a) Le principe

Nous donnons dans ce paragraphe quelques illustrations de l'utilisation de l'esprit du programme d'Erlangen dans le cas de la géométrie affine⁽¹⁶⁾. Bien entendu on peut aussi donner de tels exemples en géométrie projective (par exemple on peut démontrer le théorème de Pappus en se ramenant au cas de droites parallèles ou celui de Pascal en se ramenant au cas d'un cercle). Le principe de cette utilisation est le suivant :

1) On repère que le problème est un problème affine. Cela signifie qu'il peut mettre en jeu les notions d'alignement, de concourance, de parallélisme, de milieux, de

(16) Ce type de réflexion théorique sur la géométrie nous semble un objectif important de la formation des maîtres.

rappports de mesures algébriques sur des droites parallèles, de barycentres, d'aires (mais pas de longueur, d'angle et d'orthogonalité qui sont des notions euclidiennes).

2) On effectue une transformation affine f (qui conserve les notions ci-dessus⁽¹⁷⁾) de façon à transformer le problème en un problème plus simple. Le plus souvent cela revient à traiter un cas particulier du problème présentant une propriété euclidienne supplémentaire (on transforme un triangle en triangle équilatéral, un parallélogramme en un carré, etc.). Dans cette phase on va utiliser des résultats de transitivité.

3) On résout le problème ainsi simplifié (y compris, éventuellement, avec des outils euclidiens) et on revient au cas initial par la transformation inverse f^{-1} .

Si l'on dispose de l'affinité, ce qui était autrefois le cas dans les grandes classes du lycée, on peut aborder ce type de techniques avec les élèves. Le lecteur trouvera des exemples en ce sens dans l'article [C] de M. Carral (transformation d'un triangle en triangle rectangle isocèle ou d'une ellipse en cercle par des affinités).

Notre philosophie ici, s'agissant d'un texte à destination des professeurs, est plutôt d'utiliser les propriétés de transitivité du groupe affine, sans être obligés d'explicitement les transformations qui font effectivement le travail (c'est la même idée que pour les cas d'isométrie et de similitude).

Voici un exemple (sans grand intérêt, mais révélateur) d'application de cette technique. On veut démontrer que les médianes d'un triangle sont concourantes. Comme la notion de médiane est affine on peut modifier le problème en transformant le triangle en un triangle équilatéral par une application affine (cf. ci-dessous). Les médianes sont alors aussi les médiatrices (ou les bissectrices ou les hauteurs) et on montre que celles-ci sont concourantes.

Les paragraphes suivants proposent trois exemples plus sérieux (on peut en donner de nombreuses variantes).

b) Les tiers

Soit ABC un triangle, I, J, K des points situés respectivement sur les côtés [BC], [CA], [AB] au tiers le plus proche de B, C, A. Les droites (BJ) et (CK), (CK) et (AI), (AI) et (BJ) se coupent respectivement en P, Q, R. Que peut-on dire des aires des quadrilatères ICPR, JAQP et KBRQ ?

Le problème est clairement affine (les seules notions mises en jeu sont les rapports $1/3$ et les aires). On peut donc, pour le résoudre, le transformer par une application affine. Le point crucial est que le groupe affine (dont les éléments sont les composés des translations et des applications linéaires) est **transitif** sur les triangles (triplets de points non alignés). En effet, si on se donne A, B C et A', B', C' on commence par envoyer A sur A' par translation. Les points B et C sont transformés en B'' et C''. Il ne reste plus qu'à effectuer une transformation linéaire (avec A' comme origine) qui

envoie la base $\overrightarrow{A'B''}, \overrightarrow{A'C''}$ sur $\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}$ et on a gagné.

On peut alors supposer que l'on travaille dans un plan euclidien (s'il n'y a pas de structure euclidienne on en met une, quelconque) et on transforme ABC en un

(17) Dans le cas des aires, une application affine générale conserve seulement les rapports d'aires, mais cela suffit dans la plupart des applications.

triangle **équilatéral** $A'B'C'$ de centre O . Mais alors il est clair que les rotations de centre O et d'angles $\pm 2\pi/3$ permutent les quadrilatères images de $ICPR$, $JAQP$ et $KBRQ$. Les quadrilatères images ont donc même aire et il en est de même des quadrilatères initiaux.

Une autre méthode, essentiellement équivalente, mais qui évite le recours à l'eulclidien, consiste à dire qu'il existe une application affine qui permute les sommets de ABC (par exemple $A \mapsto B$, $B \mapsto C$ et $C \mapsto A$) et que cette application échange les quadrilatères. On en déduit facilement l'égalité des aires.

L'intérêt pour le professeur de cette vision des choses c'est d'avoir aussitôt le résultat (les quadrilatères ont même aire) et une preuve (même si celle-ci n'est pas utilisable en classe). Bien entendu, on peut donner une démonstration élémentaire (mais pas immédiate) de cette propriété en utilisant les « lemmes du collègue » évoqués dans [P] (et notamment le lemme des proportions) mais il faut faire une démonstration autonome, le seul apport de la démonstration précédente étant l'idée (importante) d'utiliser les permutations circulaires.

c) Parallélogrammes et pentagones

Voici deux autres énoncés qui participent de la même philosophie :

Soit $ABCD$ un parallélogramme et soient I, J, K, L les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ respectivement. Les droites (DI) et (AJ) , (AJ) et (BK) , (BK) et (CL) , (CL) et (DI) se coupent respectivement en P, Q, R, S . Démontrer que les quadrilatères $APSL$, $BQPI$, $CRQJ$ et $DSRK$ ont même aire.

La méthode est analogue à celle de b) : on envoie le parallélogramme $ABCD$ sur un carré et on conclut grâce aux rotations de ce carré. Attention, si on peut toujours envoyer un parallélogramme sur un carré par une application affine (on envoie d'abord un triangle et le reste suit par conservation du parallélisme), on ne peut pas envoyer un quadrilatère quelconque sur un carré (on voit ici l'importance des résultats de transitivité). Là encore, les « lemmes du collègue » fournissent facilement d'autres démonstrations de ce résultat.

On se donne un triangle ABC quelconque. Démontrer qu'il existe un pentagone convexe $ABCDE$ tel que les aires des triangles ABC , BCD , CDE , DEA et EAB soient égales.

Si $A'B'C'D'E'$ est un pentagone régulier il vérifie cette condition des aires (toujours par rotation). On envoie alors $A'B'C'$ sur ABC par une application affine f , on appelle D et E les images de D' et E' et le pentagone $ABCDE$ convient. On peut le construire facilement en notant qu'il est caractérisé par deux propriétés :

1) les côtés sont parallèles aux diagonales,

2) le rapport entre diagonale et côté est le nombre d'or $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ces deux remarques permettent de bâtir un problème accessible à un élève de lycée (on commence par caractériser en termes d'aires les trapèzes dont les bases sont dans le rapport τ).

d) Le partage du carré

L'exercice suivant est extrait du document d'accompagnement des nouveaux programmes de seconde (cf. [AP]).

Soit ABCD un parallélogramme et M un point intérieur. Comment doit-on choisir M pour que les aires des triangles AMB et BMC soient égales ? Même question avec AMCD, AMB et BMC.

L'énoncé du document suggère de commencer par le cas du carré, ce qui est une bonne suggestion puisque ce cas est suffisant, comme nous venons de le voir. Ce qui est intéressant dans cet exercice c'est qu'il peut nécessiter une traduction pour passer du cas particulier au cas général. En effet, dans le cas du carré, si on regarde les triangles AMB et BMC, pour qu'ils aient même aire il suffit que les hauteurs MH et MK soient égales, donc que M soit sur la bissectrice de \widehat{ABC} . Mais comme la notion de bissectrice n'est pas affine on ne peut espérer que le lieu cherché soit encore la bissectrice dans le cas du parallélogramme. En revanche, comme la bissectrice est aussi la diagonale du carré c'est cette diagonale qui est solution. La démonstration par les hauteurs ne fonctionne plus aussi facilement dans le cas du parallélogramme, mais le lemme de la médiane et celui de demi-parallélogramme (cf. [P]) donnent le résultat. Le dernier point peut se voir, au choix, sur le carré ou directement sur le parallélogramme.

Références :

[AP] Accompagnement des programmes, Mathématiques classe de seconde, CNDP, octobre 2000.

[BZ] BAREIL Henri et ZEHREN Christiane, Méthodes générales pour résoudre des problèmes, in Brochure APMEP numéro 79, 1990, p. 121-136.

[C] CARRAL Michel, Géométrie du secondaire et programme d'Erlangen, Bull. APMEP, novembre 2000.

[Ch] CHASLES M., Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Bruxelles, 1837, réédition J. Gabay, 1989.

[DC] DELTHEIL R. et CAIRE D., Géométrie, classe de mathématiques, Baillières, 1939. Géométrie et compléments, Réédition J. Gabay.

[P] PERRIN Daniel, Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie affine du collège, Bull. APMEP, novembre 2000.

[R] Rapport d'étape de la commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, Bull. APMEP, septembre 2000.

[Ro] ROBERT Aline, L'épreuve sur dossier à l'oral du CAPES, Géométrie, Ellipses, 1995.

[RC] ROUCHÉ E. et de COMBEROUSSE Ch., Traité de Géométrie, Gauthier-Villars, 1957.

Nous adressons nos vifs remerciements à Henri Bareil, Georges Lion, Aline Robert et à la commission du Bulletin pour leurs précieuses remarques et suggestions.