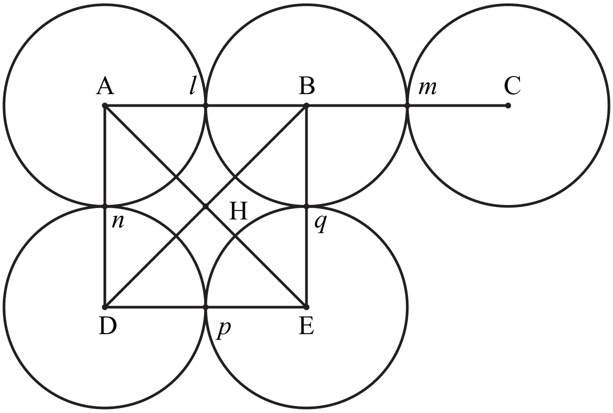
Aires, symétries et partages

Henri Bareil

Cinq disques, de même rayon R, sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous.



Ils sont donc tangents (extérieurement) en l, m, n, p, q. ABED et BCFE sont des carrés, de centre H pour le premier, A, B, C, … étant les centres de disques.

Il s'agit de tracer une droite Δ qui partage l'ensemble de ces cinq disques en deux parties d'aires égales.

Apparu dans le Rallye mathématique Poitou-Charentes 1992, ce problème a été repris dans « FICHIER ÉVARISTE II » (brochure APMEP no 132) qui propose deux solutions.
(On en retrouve un avatar dans KANGOUROU 2000 qui propose quatre droites issues de C et demande « la bonne »). Voici une approche, à usage enseignants, pour épauler une réflexion des élèves, avec conjectures et, le cas échéant, démonstrations.

Reprenons le problème général.

Intuitivement, il va de soi qu'il existe une solution Δ et une seule lorsqu'on impose un point de Δ (idem avec sa direction).
Il serait bon d'y faire réfléchir les élèves.
Des logiciels de géométrie peuvent (ou pourraient sans doute dans un proche avenir) permettre de visualiser cela et de situer la solution avec une bonne approximation.
Ainsi pourrait-on, par exemple, conjecturer les positions précises de Δ *obligée de à passer par l'un des centres*.

Nous allons, ci-après, rechercher, sans logiciels, ces droites-solutions passant par l'un des centres.

Je m'aiderai de la propriété suivante :

« *Quand une figure, d'aire définie, possède un centre de symétrie, toute droite passant par ce centre la partage également* », où « partager également » signifie partager en deux parties d'aires égales.

Je désignerai chaque disque par la même lettre, entre parenthèses, que son centre. Les affirmations de symétries seraient à établir : elles sont élémentaires.

1º Droite passant par A :

q est centre de symétrie de l'ensemble des quatre autres disques.
Donc (A*q*) partage également :
– d'une part le disque (A),
– d'autre part l'ensemble des quatre autres disques.
(A*q*) est la solution.

2º Droite passant par C :

Démarche analogue avec (CH), H étant le centre de symétrie de {(A),(B),(D),(E)}.

3º Droite passant par B :

p est le centre de symétrie de {(D),(E)}.
Donc (B*p*) partage également : d'une part (B), d'autre part {(D),(E)}, et enfin laisse (A) et (C) de part et d'autre. (B*p*) est la solution.

4º Droite passant par E :

Même démarche avec *l*, centre de symétrie de {(A),(B)} : (El) est la droite cherchée.

5o Droite passant par D :

Voir Annexe 2.

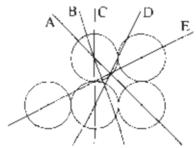
Remarques :

Avec ce problème, limité aux recherches avec les centres, on peut insister sur les conjectures, qui ouvrent la voie aux démonstrations.
Celles-ci sont simples dès lors que les symétries sont perçues (elles permettent de saisir des configurations élémentaires).
Le problème est très modulable. Cf. l'énoncé proposé par Kangourou.
Quant au problème général, il peut être intégré à des considérations élémentaires d'algèbre ou d'analyse sur des variations de fonctions.

ANNEXE 1

KANGOUROU DES MATHÉMATIQUES 2000

20. Voici cinq cercles qui se touchent, tous de même rayon.
Quelle est la droite qui partage la surface couverte par les cinq disques en deux parties de même aire ?
A) A
B) B
C) C
D) D
E) E



Réponse **D.** De part et d'autre de la droite D, il y a un disque complet, un demi-disque et un disque où il manque un petit morceau (le même à droite et à gauche).

Question 20	A	B	C	D	E	non réponse
6 ème	9,7	5,6	7,5	24,1	**41,7**	11,4
5 ème	7,6	5,7	6,5	**38,3**	34	7,9

(% de réponses)

ANNEXE 2

La démarche est la même que dans les autres cas avec *m*, centre de symétrie de {(B),(C)} et la droite D*m*.

Mais, ici, le « de part et d'autre » de (D*m*), pour les cercles (A) et (E)ne relevant pas de la symétrie est moins évident qu'aux 3° et 4°. (D*m*) pourrait-elle couper le cercle (E) ? *Si on y tient*, on peut « contrôler » une bonne figure grâce à un petit calcul, niveau Collège, de la distance EK de E à (D*m*). Soit T l'intersection de (EB) et (D*m*).

• Grâce à Thalès-triangle, $\frac{\mathrm{ET}}{2\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{ED}}{3\mathrm{R}}$ (faire intervenir le parallélogramme B*m*DL et les triangles EDT, ELB). D'où $\mathrm{ET} = \frac{4}{3}\mathrm{R}$.

Grâce à Pythagore et à la relation des aires EK × DT = ET × ED,

$$\mathrm{EK}^2\,(\mathrm{DE}^2 + \mathrm{ET}^2) = \mathrm{ET}^2 \times \mathrm{ED}^2.$$

De là

$$\mathrm{EK}^2 = \frac{16}{13}\mathrm{R}^2 > \mathrm{R}^2 .$$

Donc (D*m*) ne coupe pas (E).