Géométrie en classe de Seconde : « anciens et nouveaux outils »

Jean-Pierre Richeton

La réintroduction des *cas d'égalité des triangles* et *des triangles de même forme* dans les programmes de Seconde a fait se poser pas mal de questions à plus d'un… Certains en faisaient même tout un fromage jusqu'à croire ou faire croire qu'il fallait jeter les transformations aux oubliettes ! Rien d'étonnant non plus finalement quand on songe aux coups de balancier qui jalonnent nos programmes… Certes les transformations allaient perdre un peu de leur monopole(1) mais pas de quoi bouleverser l'enseignement de la géométrie pour autant… Personnellement, je ne les avais jamais mis au pinacle, préférant donner des exercices permettant différentes approches sans chercher à en privilégier une par rapport à l'autre tout en montrant que certaines sont plus pertinentes que d'autres selon les situations. La réintroduction des cas d'égalité des triangles et des triangles de même forme allait donc me permettre de compléter un peu plus la « boîte à outils » de mes élèves pour ce type de démarche. Dommage que les auteurs de manuels scolaires n'aient pas saisi l'occasion pour donner moins d'exercices fermés, qui abondent toujours autant dans leurs ouvrages, où l'outil à utiliser est fortement suggéré quand il n'est pas carrément donné par l'énoncé, ce qui pour moi les vide d'intérêt. Cela aurait pu inciter les collègues à oser lancer leurs élèves dans des exercices où on laisse plus de place à l'initiative… et éviter qu'ils ne soient réservés qu'aux soi-disant « bons élèves » car ce type d'exercice est avant tout un problème de pratique régulière en laissant du temps pour chercher ainsi que ne cessent de nous le recommander les GTD ou GEPS successifs…

Les exercices qui suivent n'ont pas d'autre but si ce n'est également de permettre de revisiter certaines démonstrations avec ces « nouveaux » outils…

I. Qui a dit « Nouveaux programmes » ?

I. 1. Premier exemple

Nicole Vogel et Jean-Pierre Richeton – IREM de Strasbourg

Un énoncé de 1965, classe de quatrième du « Lebossé – Hémery » – Nathan (page 136, nº 33)…

On considère un triangle isocèle ABC dans lequel la médiatrice du côté AC coupe le prolongement de la base BC au point D.

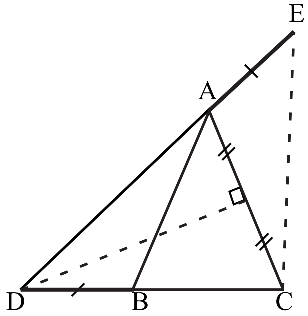
On joint DA que l'on prolonge d'une longueur AE = BD.

1) Montrer que le triangle DAC est isocèle. Conséquences ?

2) Comparer les triangles ABD et CAE. Que peut-on dire du triangle CDE ?

(1) et encore c'est oublier un peu vite que les élèves ont d'autres « outils » à leur disposition tels que la trigonométrie par exemple.

Et voici ce qu'il est devenu en 2000…(2)



ABC est un triangle isocèle en A. La médiatrice de [AC] coupe (BC) en D. On note E le point de la droite (AD) tel que EA = BD avec D et E de part et d'autre de A.
1) Démontrer que le triangle CAD est isocèle.

2) Comparer les angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{ABD}$.
3) Démontrer que les triangles ABD et CAE sont isométriques.
4) Quelle est la nature du triangle CDE ?

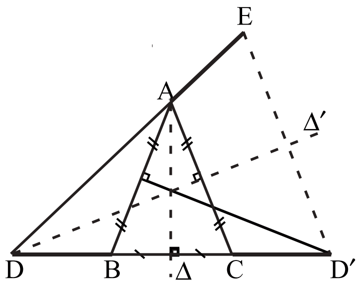
Ne pourrait-on présenter cet exercice de manière « moins balisée » ?

On considère un triangle ABC *isocèle en* A *dans lequel la médiatrice du côté* [AC] *coupe la droite* (BC) *en un point* D *extérieur à la base* [BC]. *Soit* E *le point de la demi-droite* [DA) *tel que* E ∉ [DA] et AE = BD.
Étudier la nature du triangle DCE.

Corrigé possible :
Par construction, BD = AE et BA = AC. Il est donc légitime de se poser la question de l'égalité ou non des triangles ABD et CAE… Pour cela il suffira de comparer les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CAE}$.

Si α est la mesure commune (en degrés par exemple) des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$, alors α est également la mesure de l'angle $\widehat{CAD}$ car, par construction, le triangle ADC est isocèle en D. Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CAE}$ ont donc même mesure puisqu'ils ont des angles supplémentaires de même mesure…
Les triangles ABD et CAE sont donc « égaux » (deuxième cas) d'où DA = CE, or DA = DC…

Autre solution (idée directrice : introduire une nouvelle symétrie)(3) :



Soit D′ le symétrique de D par rapport à Δ, la médiatrice de [BC].
D'où :

$$AD' = AD \quad (1)$$

De plus CD′ = BD = AE et donc la médiatrice Δ′ de [AC], axe de symétrie du triangle isocèle DAC, est aussi axe de symétrie pour D′ et E. D'où :

$$AD' = CE \quad (2)$$

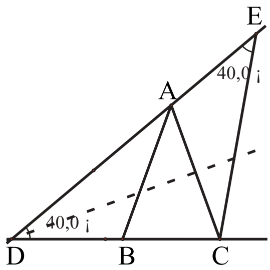
De (1) et (2) on déduit : CE = CD.

(2) Exercice nº 16, page 238 du DiMathème – Didier – Classe de Seconde que l'on retrouve également dans d'autres manuels à une variante près.
(3) Méthode suggérée par Henri Bareil qui s'est aimablement proposé pour monter cet article.

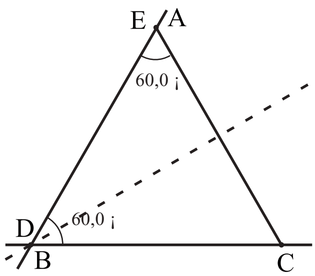
Remarque : *cette méthode, « nouvelle » par rapport aux méthodes en usage en 1965, relève des programmes des années 1990…, sans être périmée aujourd'hui… et sans exclure pour autant les autres méthodes.*

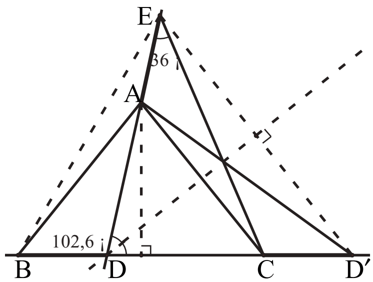
On peut aussi proposer cette recherche en utilisant des logiciels de géométrie disponibles, tels que GEOPLAN ou CABRI II par exemple…

1° Représenter un triangle ABC *isocèle en* A.
Placer le point D *intersection de la médiatrice du côté* [AC] *avec la droite* (BC).
Placer le point E *sur la demi droite* [DA) *tel que* E $\notin$ [DA[*et* AE = BD.
2° Établir une conjecture concernant la nature du triangle DCE *suivant l'angle* $\widehat{BAC}$ [4].
3° Démontrer la conjecture établie en 2°.

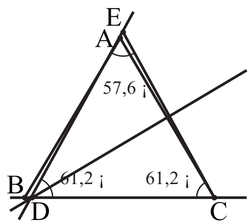


À la question 2°, les logiciels de géométrie cités, de manière peu « coûteuse » pour les élèves (une seule figure à construire…), permettent différentes stratégies comme de faire afficher la mesure des angles $\widehat{CDA}$ et $\widehat{CED}$ ou la longueur des côtés CD et CE, ou encore de faire tracer la médiatrice de [DE]… et amener les élèves à se poser des questions et conjecturer dans quelles situations le triangle CDE est isocèle ou pas…, c'est à dire les laisser découvrir le cas particulier du triangle équilatéral pour qu'ils se saisissent eux-mêmes des différents cas ($\widehat{BAC} \leq 60°$ et $\widehat{BAC} > 60°$), etc.



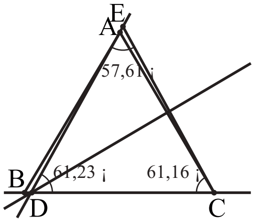


Remarque : avec un seul chiffre après la virgule, l'affichage des mesures des angles $\widehat{EDC}$ et $\widehat{ECD}$ pourrait laisser croire à tort à l'égalité des mesures comme ci-contre, ce que semble confirmer la mesure de $\widehat{DEC}$ car on a bien alors 180° comme somme des mesures de ces angles…



(4) En obligeant la médiatrice du côté AC à couper « le prolongement de la base », l'énoncé du « Lebossé – Hémery » de 1965 exige par cela-même $\widehat{BAC} < 60°$. Bien que la figure soit donnée, cette indispensable condition est ignorée par les énoncés 2000…

Mais en demandant l'affichage avec deux chiffres après la virgule, ceci est infirmé…



Mais cette situation peut aussi être exploitée de façon bien différente :

Par exemple en faisant chercher l'isométrie qui transforme ABD en CAE à l'aide de logiciels tels que Geoplan ou Cabri II. C'est ce que nous propose Nicole Vogel ci-après.

1) Faire une figure.

2) a) Existe-t-il une translation qui transforme ABD en CAE ? Pourquoi ?
Peut-il exister une rotation qui transforme ABD en CAE ?

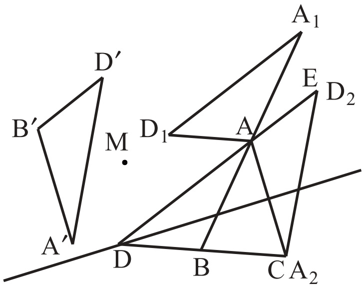
b) Tracer l'image A_1AD_1 de ABD par $t_{\overrightarrow{BA}}$.

3) a) S'il existe une rotation de centre A transformant A_1AD_1 en CAE, quel est son angle ?

b) Tracer l'image de A_1AD_1 par la rotation de centre A et d'angle θ déterminé au a).

4) a) Prendre un point M quelconque du plan et tracer l'image A′B′D′ de ABD par la rotation de centre M et d'angle θ.

b) Déplacer le point M de telle manière que A′B′D′ soit confondu avec CAE. Où est alors le point M ?

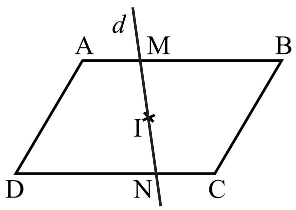


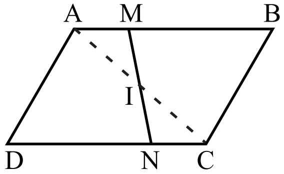
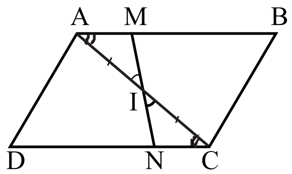
Conclure : quelle est l'isométrie transformant ABD en CAE ?

I. 2. Deux exercices « simples » en géométrie plane… pour montrer différentes approches possibles à partir des acquis de collège

Exercice 1 :

La figure ci-contre représente un parallélogramme ABCD de centre I.
Une droite *d* passant par I coupe le côté [AB] en M et le côté [DC] en N.
Comparer AM et CN.



Avec une transformation	Avec des triangles isométriques
Le point I étant le centre de symétrie de ABCD, il est immédiat que le point M a pour image le point N par ($\mathcal{S}_I$) symétrie centrale de centre I.  $\mathcal{S}_I$: A $\mapsto$ C B $\mapsto$ D Tout point M du segment [AB] a donc son image M′ sur le segment [DC] tel que M, I, M′ soient alignés… $\mathcal{S}_I$: A $\mapsto$ C M $\mapsto$ N D'où AM = CN.	 $\widehat{MAI} = \widehat{NCI}$ comme « alternes-internes ». $\widehat{AIM} = \widehat{CIN}$ comme « opposés par le sommet ». IA = IC car I milieu des diagonales. Les triangles AIM et CIN sont donc isométriques (Premier cas d'égalité des triangles). D'où AM = CN.

Remarque : cet exercice aurait pu également faire intervenir la **projection des milieux** si celle-ci n'avait pas disparue des programmes de collège :
Considérons la projection p de (AC) sur (MN) selon la direction (AB)

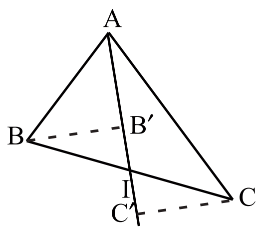
p : A $\mapsto$ M
C $\mapsto$ N
I $\mapsto$ I

I, milieu de [AC] a donc pour image I milieu de [MN].

Exercice 2 :

Étant donné un triangle quelconque ABC, on appelle respectivement B′ et C′ les projetés orthogonaux des points B et C sur la médiane (AI) de ce triangle.

Le but de cet exercice est d'étudier la nature du quadrilatère BB′CC′.



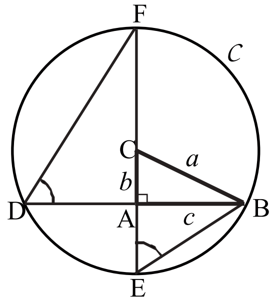
Avec une transformation	Avec des triangles isométriques
En utilisant la symétrie centrale de centre I, ($\mathcal{S}_I$) $\mathcal{S}_I$: $I \mapsto I$ $B \mapsto C$ $C \mapsto B$ $(AI) \mapsto (AI)$ $\Delta_B \mapsto \Delta_C$ où Δ_B est la perpendiculaire à (AI) passant par B et Δ_C la perpendiculaire à (AI) passant par C. d'où par $\mathcal{S}_I$: $\Delta_B \cap (AI) \mapsto \Delta_C \cap (AI)$ c'est à dire : $B' \mapsto C'$…	Les droites (BB′) et (CC′) sont parallèles car perpendiculaires à une même droite d'où : $\widehat{IBB'} = \widehat{ICC'}$ comme « alternes-internes », or $\widehat{BIB'} = \widehat{CIC'}$ comme « opposés par le sommet » et BI = IC car I milieu de [BC]. Les triangles IBB′ et ICC′ sont donc isométriques (Premier cas d'égalité des triangles). D'où : IB′ = IC′...
Avec la trigonométrie	**Avec les aires**
$\dfrac{IB'}{IB} = \sin \widehat{IBB'}$ $\dfrac{IC'}{IC} = \sin \widehat{ICC'}$ or $\widehat{IBB'} = \widehat{ICC'}$ comme « alternes-internes » et IB = IC d'où : IB′ = IC′…	Les triangles ABI et AIC ont même aire (propriété caractéristique d'une médiane), c'est à dire : $\dfrac{1}{2}\ BB' \times AI = \dfrac{1}{2}\ CC' \times AI$ d'où : BB′ = CC′ et comme (BB′) // (CC′)…

Remarque : cet exercice peut également être traité en utilisant la **projection des milieux**…
Par conservation du milieu par la projection orthogonale sur (AC), le milieu de [BC] est envoyé en le milieu de [B′C′], d'où [BC] et [B′C′] ont même milieu I…

II. Vers le théorème de Pythagore avec des *triangles de même forme…*

II. 1. Première démonstration :

Soit ABC un triangle rectangle en A.
On pose AB = c, BC = a, CA = b.
1. Construire le cercle $\mathcal{C}$ de centre C et passant par B, c'est à dire de rayon a. Noter E et F les extrémités du diamètre de $\mathcal{C}$ portant le côté [AC]. Noter D le point où (AB) recoupe $\mathcal{C}$.
2. Exploiter cette figure pour donner une démonstration du théorème de Pythagore.



Démonstration :
Par construction, [BD] est une corde du cercle $\mathcal{C}$ perpendiculaire au diamètre [EF] qui est axe de symétrie de $\mathcal{C}$: (EF) est donc la médiatrice de cette corde, d'où AD = c, et $\widehat{DEA} = \widehat{BEA}$.

Remarque : *on peut aussi faire intervenir le fait que les triangles* ADE et ABE *sont isométriques (Deuxième cas d'égalité) pour déduire que* $\widehat{DEA} = \widehat{BEA}$ …

Le triangle EDF étant rectangle en D (« théorème de l'angle droit »), les triangles rectangles EDF et EAD sont donc de même forme d'où $\widehat{DEA} = \widehat{FDA}$.

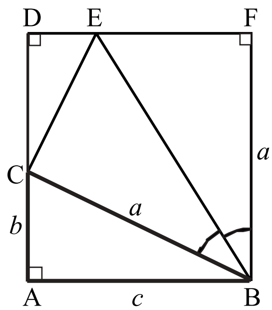
Remarque : *passer par la « forme » des triangles me semble cependant moins élémentaire que de dire simplement que les angles* $\widehat{DEA}$ *et* $\widehat{FDA}$ *sont égaux car ayant le même complément* $\widehat{ADE}$ …

On en déduit que $\widehat{FDA} = \widehat{BEA}$.

Remarque : ***et l'égalité des angle**s* $\widehat{BEA}$ *et* $\widehat{FDA}$ *serait immédiate – sans transiter par* $\widehat{DEA}$ *– avec le théorème de l'angle inscrit …*

Les triangles rectangles FDA et BEA sont donc des triangles de même forme d'où $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{AD}{AE}$, c'est-à-dire $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{c}{a-b}$, d'où l'on tire $(a + b)(a - b) = c^2$ et finalement : $a^2 = b^2 + c^2$.

II. 2. Deuxième démonstration :



Étant donné un triangle ABC rectangle en A, on pose AB = c, BC = a, CA = b.
1. Construire le rectangle ABFD tel que BF = a et C ∈ [AD]. La bissectrice de $\widehat{CBF}$ coupe le côté [FD] en E.
2. Exploiter cette figure pour donner une démonstration du théorème de Pythagore.

Démonstration :
Les triangles BCE et BFE sont isométriques (Deuxième cas d'égalité) d'où :

EC = EF et $\widehat{BCE} = \widehat{BFE} = 90°$.

Par conséquent $\widehat{DCE} = \widehat{ABC}$ car ayant le même complément, à savoir $\widehat{ACB}$.
Les triangles rectangles CDE et BAC sont donc des triangles de même forme d'où :

$$\frac{DE}{AC} = \frac{CD}{AB} = \frac{CE}{BC}.$$

En posant DE = α, on obtient : $$\underbrace{\frac{\alpha}{b}=\mathrlap{\overbrace{\phantom{\frac{a-b}{c}=\frac{c-\alpha}{a}}}^{(2)}}\frac{a-b}{c}}_{(1)}=\frac{c-\alpha}{a}.$$

De (1) on tire : $c\alpha = ab - b^2$ et de (2) : $a^2 - ab = c^2 - c\alpha$.
D'où : $a^2 - ab = c^2 - ab + b^2$ et donc $a^2 = b^2 + c^2$.

<u>Remarque</u> : *Sachant que* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *induit* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, *à partir de* $\frac{a-b}{c}=\frac{\alpha}{b}=\frac{c-\alpha}{a}$, *on obtient* $\frac{\alpha}{b}=\frac{c-\alpha}{a}=\frac{c}{b+a}$ *d'où :* $\frac{c}{b+a}=\frac{a-b}{c}$ *et donc* $(a-b)(a+b)=c^2$…

III. Démonstrations utilisant *les aires*…

III.1. Première démonstration du théorème de Pythagore avec les aires :

Étant donné un triangle ABC rectangle en A, on construit les carrés extérieurs BCDE, CAFG et ABHI.

Les triangles HBA et HBC ont même base HB et « même hauteur » car (IC) // (HB), donc :

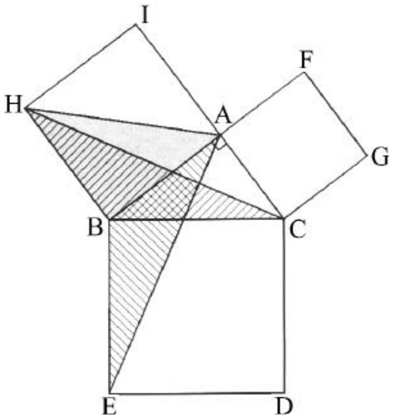
aire(HBA) = aire(HBC).

La rotation de centre B, d'angle –90° envoie :
H sur A
B sur B
C sur E.

Elle transforme donc le triangle HBC en le triangle ABE et donc :

aire(HBC) = aire(ABE).

Ainsi : aire(HBA) = aire(ABE).



Soit J le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC et soit K le point d'intersection de la droite (AJ) avec [ED].
Les triangles ABE et BEK ont même base BE et « même hauteur » car (AK) // (BE), donc :

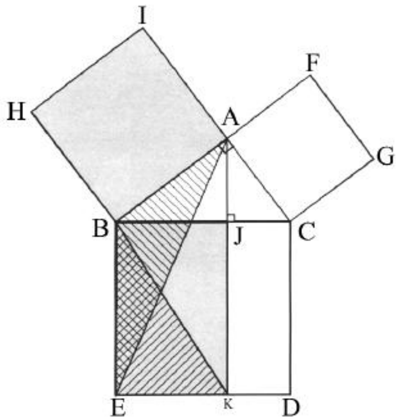
aire(ABE) = aire(BEK).

Ainsi : aire(HBA) = aire(BEK)
et donc : 2 × aire(HBA) = 2 × aire(BEK)
c'est à dire :

aire(HBAI) = aire(BEKJ) (1)

De la même façon on démontre que :

aire(GCAF) = aire(CDKJ) (2)



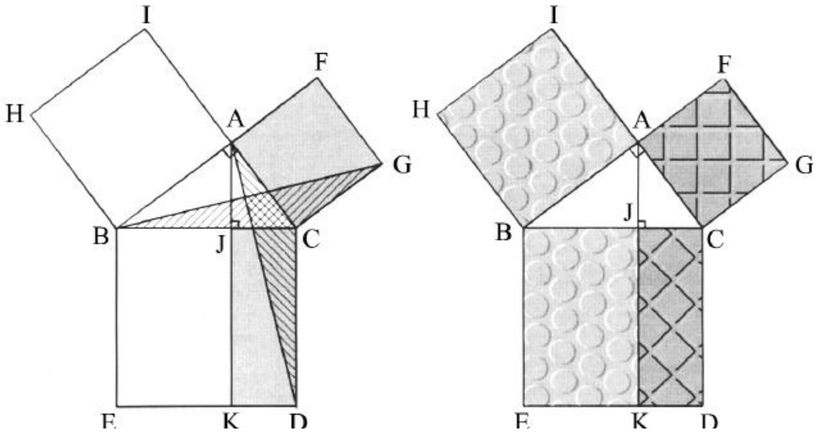
Or aire(BEKJ) + aire(CDKJ) = aire(BEDC), donc de (1) et (2), on déduit :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Remarques :

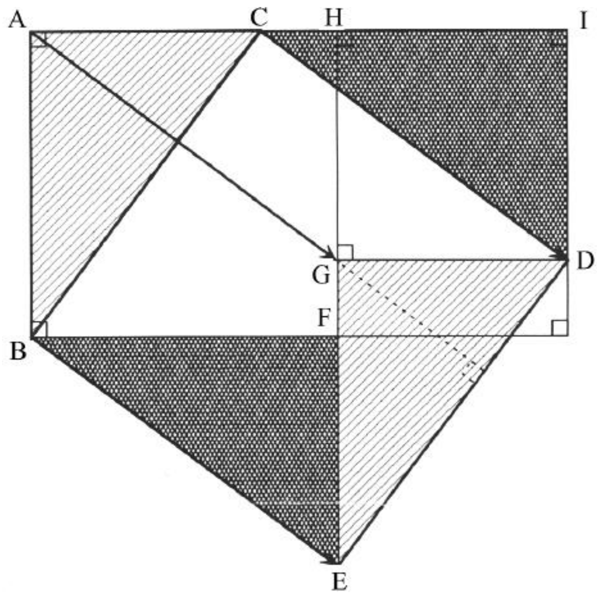
De (1) on déduit : $BJ \times BE = BA^2$ c'est à dire $BJ \times BC = BA^2$

De (2) on déduit : $CJ \times CD = CA^2$ c'est à dire $CJ \times CB = CA^2$



III.2. Deuxième démonstration du théorème de Pythagore avec les aires :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB \geq AC$. On pose $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. On construit le carré ABFH de côté c puis le carré HIDG de côté $HI = AC = b$ comme indiqué sur la figure ci-dessous c'est à dire tel que les points A, H et I soient alignés et donc tel que G soit sur [HF].



Par construction CH = $c - b$, d'où CI = c. Les triangles rectangles ICD et ABC sont donc isométriques (Deuxième cas d'égalité), d'où CD = BC = a et $\widehat{\text{ICD}} = \widehat{\text{ABC}}$.

On en déduit que $\widehat{\text{ACB}} + \widehat{\text{ICD}} = 90°$ et donc que $\widehat{\textbf{BCD}}$ **est un angle droit**.
Soit E sur la demi-droite [HF) tel que GE = c. Les triangles rectangles GED, FBE, ABC et ICD sont donc isométriques (2ème cas d'égalité). D'où

$$\text{ED} = \text{BC} = a = \text{CD} = \text{BE}.$$

Le quadrilatère BCDE est donc un carré (losange ayant un angle droit).
Comme :

$$\begin{aligned}\text{aire}\,(\text{BCDE}) &= \text{aire}\,(\text{FBCDG}) + \text{aire}\,(\text{GED}) + \text{aire}\,(\text{FBE})\\ &= \text{aire}\,(\text{FBCDG}) + \text{aire}\,(\text{ABC}) + \text{aire}\,(\text{ICD}),\end{aligned}$$

on a aussi :

$$\text{aire(BCDE)} = \text{aire(ABFH)} + \text{aire(HIDG)},$$

c'est à dire : $a^2 = b^2 + c^2$.

Remarque : *les segments* [AC] *et* [GD] *étant parallèles et de même longueur b,* ACDG *est donc un parallélogramme d'où la translation de vecteur \O(CD,\s\up9()) qui envoie* C *en* D *envoie également* A *en* G *et* B *en* E…

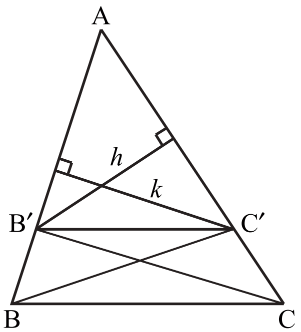
III.3. Démonstration du théorème de « Thalès–triangle » avec les aires :

Il s'agit d'une méthode classique. On pourra se reporter à l'article de Daniel Perrin dans notre Bulletin Vert n° 431.

Voici une proposition de scénario possible pour ne pas « parachuter » la méthode :

1. Faire découvrir que les longueurs AB′ et AB peuvent être considérées comme les « bases » de triangles ayant même hauteur … idem pour les longueurs AC′ et AC…

➯ une unité de longueur étant choisie, noter h la longueur de la hauteur issue de B′ dans le triangle AB′C′ et k celle de la hauteur issue de C′ dans le même triangle.



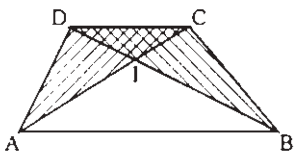
2. Faire trouver des triangles de même aire…

➯ des triangles de « même base » et de « même hauteur »…

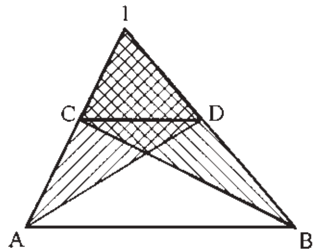
Ainsi : aire (BB′C′) = aire (CC′B′) = α.
D'où l'on déduit : aire(AC′B) = aire(AB′C) = aire(AB′C′) + α.
Or : 2 × aire (AC′B) = k × AB et 2 × aire (AB′C) = h × AC,
ce qui permet d'obtenir : k × AB = h × AC.
D'autre part, k × AB′ = h × AC′ = 2 × aire (AB′C′), d'où finalement :

$$\frac{h}{k} = \frac{\text{AB}'}{\text{AB}} = \frac{\text{AC}'}{\text{AC}}.$$

Remarque : cette démonstration s'appuie sur les **configurations** « en trapèze » suivantes :



Or aire(ACD) – aire(CID) = aire(AID) et aire(BCD) – aire(CID) = aire(BIC).



Or aire(ACD) + aire(CID) = aire(AID) et aire(BCD) + aire(CID) = aire(BIC).

Comme aire(ACD) = aire(BCD) ⇔ (AB) // (CD), on peut donc énoncer le théorème suivant :

> Étant donné un quadrilatère ABCD tel que les points C et D appartiennent au même demi-plan de frontière (AB) et tel que les droites (AC) et (BD) se coupent en I, alors :
>
> (AB) // (CD) équivaut à aire (AID) = aire (BIC).