Calcul littéral, équations, inéquations

Boris Véron(*)

Je vais présenter le travail accompli dans différents chapitres du programme de Troisième et Quatrième à partir des suites de Fibonacci. Il s'agissait dans mes classes de donner du sens et de dégager l'intérêt du calcul littéral avec mise en équation et résolution. Les activités proposées permettent aussi de faire réfléchir aux notions de variable et d'inconnue qui, à mon avis, sont insuffisamment explicitées au collège.

1. Les suites de Fibonacci

Je commence par expliquer sur un exemple, le principe des suites de Fibonacci.

(a)	7	2	9	11	20	31	51	82	133	215

Suit un exercice autocorrectif afin de s'assurer que tout le monde a bien compris.

(b)	2	5	7	12						212

2. Les équations et le calcul littéral

Le travail commence véritablement lorsque je donne le « dernier » nombre et je demande de retrouver *une* suite y conduisant. Tous les élèves s'y investissent, *a priori*, il n'y a que des additions et en plus ils ont le droit à la calculatrice.

(c)										178
(d)										301

Bizarrement cet exercice est assez bien réussi par les moins bons élèves qui choisissent *un* avant-dernier nombre et remontent, et beaucoup moins par les bons élèves qui cherchent en majorité à partir du début. Je ne manque pas de le signaler.

Dans les suites (c) et (d), si l'on considère des suites en nombres entiers (je ne sais pas pour vous, mais dans mes classes, tous les élèves voulaient qu'il en soit ainsi), seuls les choix respectifs de 110 et 186 en avant-dernière position permettent d'obtenir des suites en entiers positifs (cf. Annexe). Comme il est très rare que les élèves les choisissent, cela nous a conduit à refaire des soustractions de nombres négatifs.

Puis, j'en viens à mon objectif premier : je fixe le premier et le dernier nombre, et je demande de retrouver *la* suite. Je dis que je n'interviendrai plus jusqu'à la fin de la séance, et que j'attends de voir comment ils vont se débrouiller avec ce problème (en apparence simple). Les trois suites sont choisies de sorte que la première ne comporte que des entiers positifs, la seconde des décimaux non entiers et la troisième

(*) Collège Jacques Prévert, 31650 Saint Orens. Mél : boris.veron@free.fr

des négatifs afin que la recherche par tâtonnements soit longue (et souvent infructueuse).

(e)

9							241

(f)

8					77

(g)

7									45

Cette année, dans chaque classe, un élève a mis le problème en équation. Il a eu à préparer le début du cours de la séance suivante. (On avait déjà travaillé sur les équations du type $ax + b = c$). Mais il aurait été tout aussi intéressant de formaliser la méthode par essais/rectification, et même de comparer la pertinence de ces deux méthodes pour ce type d'exercice.

La séance suivante a donc commencé par l'exposé d'un élève avec questions et réponses. Ensuite chacun a dû se confronter avec des suites, du calcul littéral et des équations.

À ce point du cours, on peut remarquer que :

- le statut de x ne pose de problème à personne. x est vraiment le nombre (inconnu) à mettre dans la deuxième case.
- la supériorité de la méthode du calcul littéral avec mise en équation semble se dégager.

La séance se poursuit avec des problèmes similaires à traiter. J'ai repris l'explication sur la résolution d'une équation, puis chaque élève a dû résoudre au moins un problème de manière autonome. Ils ont tous un problème à chercher pour la séance suivante.

La séance suivante débute par la correction de l'exercice à chercher puis j'en donne d'autres (trop pour mes élèves). Ils s'y mettent quand même, mais commencent à en avoir assez de faire toujours la même chose. Quand ils me disent que c'est toujours les mêmes calculs, je leur suggère que l'on pourrait les faire une fois pour toutes. Les regards montrent qu'ils se demandent bien comment. Je leur donne alors le tableau à compléter(1) :

nº 1	nº 2	nº 3	nº 4	nº 5	nº 6	nº 7	nº 8	nº 9	nº 10	nº 11	•••
a	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$	$5a+8b$					•••

Certains travaillent alors de façon autonome, d'autres ont besoin d'explications sur la façon d'utiliser ce tableau. On parle du statut de a et de b dans ce tableau, différent du statut de x dans les tableaux précédents. Et du changement de statut de b lorsque l'on passe à l'équation en remplaçant a par sa valeur dans un cas particulier.

Je n'affirme pas que toutes les difficultés sont surmontées définitivement (la fin de l'année a prouvé le contraire), mais au moins, on a démontré le caractère

(1) Avec des élèves brillantissimes (voire plus que cela), on peut donner à compléter la suite de Fibonacci commençant par deux « 1 » et demander de faire le lien entre ses termes et les coefficients des variables a et b dans le tableau de référence. Comme ce n'est pas le but de mettre à jour la structure d'espace vectoriel, on peut juste faire observer ce lien, encore qu'il ne faille pas détourner les élèves de l'objectif : ils ont déjà beaucoup à comprendre.

performant du calcul littéral pour résoudre toute une catégorie de problèmes, on a aussi pu travailler à partir de problèmes motivants sur les notions d'inconnue, de variable.

Au passage je note qu'au cours de ces trois séances, je n'ai pas vu une seule fois des erreurs du type $3x + 5 = 8x$. Et lorsque, dans d'autres séances, j'ai vu apparaître un $x + 4 = 5x$, j'ai eu un document de référence pour y remédier.

3. Les inéquations et les systèmes d'inéquations

Je n'avais pas imaginé utiliser les suites de Fibonacci avec d'autres objectifs, mais au cours de la première séance, il m'a été demandé comment choisir l'avant-dernier nombre pour obtenir une suite en entiers positifs. En quatrième, j'ai repoussé la question à plus tard. J'ai eu d'autant moins mauvaise conscience qu'un élève a remarqué que dans les suites précédentes (sic), le quotient du dernier par l'avant-dernier nombre était environ égal à 1,6. Il avait essayé, cela avait aussi marché pour les suites proposées dans la première séance. Cela m'a permis (ou obligé, selon le temps disponible) de « faire » un peu de culture sur le nombre d'or. Mais cela m'a donné l'idée d'utiliser ce cadre en troisième pour aborder les inéquations.

J'ai donné à compléter en **entiers positifs** des suites dont le dernier terme est donné. On a appelé x l'avant-dernier nombre et après que chacun ait eu le temps de chercher suffisamment longtemps, on a remonté les calculs.

(h)								389

Aucun élève ne s'est aperçu qu'il suffisait que les deux premiers termes soient positifs pour que toute la suite le soit. Ils ont donc résolu toutes les inéquations avant que je leur fasse la remarque.

Dans ces inéquations, le coefficient de x est tantôt positif, tantôt négatif. Cela permet de traiter les deux types ($ax - b > 0$ ou $c - dx > 0$ avec a, b, c et d positifs) d'inéquations à ce moment. La résolution du système (de plein) d'inéquations n'a présenté de difficulté pour personne.

Ensuite, comme avec les quatrièmes, je donne beaucoup de suites à compléter afin d'amener le calcul avec des variables. Les systèmes obtenus auront zéro, une ou plusieurs solutions.

Au cours de ce travail, on a dû dans l'ordre :

- Simplifier des expressions contenant des soustractions de différences.
- Résoudre des inéquations.
- Choisir parmi les solutions des systèmes d'inéquations, celles qui étaient aussi solutions du problème (inéquations en nombres entiers positifs).
- Parler ici aussi de la différence entre variable et inconnue.

4. Les systèmes d'équations à deux inconnues

Il paraît naturel après tout cela d'essayer d'utiliser ces suites pour résoudre des systèmes d'équations. Cependant, il faut vite déchanter. Prenons un exemple, la suite (i) peut être complétée en choisissant comme inconnue le successeur de 7 (ou le prédécesseur, ou même le prédécesseur de 45).

	(i)				7					45

Il n'est pas nécessaire ici de changer d'outil, les équations à une inconnue suffisent. On peut dépasser cet obstacle en considérant des suites de Fibonacci associées telles que les deux premiers termes de l'une s'expriment en fonction des deux premiers termes de l'autre. Le cas le plus simple est :

5	8	13	21	34	55	•••
8	5	13	18	31	49	•••

On peut alors demander de retrouver de telles suites en donnant un terme de l'une (par exemple 53 en 12^{e} terme) et un terme de l'autre (par exemple 98 en 9^{e} terme).

Il faut noter cependant que les systèmes obtenus n'ont que des coefficients positifs. Il faudra travailler avec des coefficients négatifs dans un autre contexte.

5. Prolongements et autres utilisations possibles

- Au collège
  - ❑ Puissances.

    Suites multiplicatives (on multiplie deux termes consécutifs pour obtenir le suivant). On peut alors remarquer que 1 joue pour la multiplication le même rôle que 0 pour l'addition. Suite additive à partir des termes *a* et 0, suite multiplicative à partir des termes *a* et 1.
  - ❑ Fonctions affines.

    Le dernier terme étant fixé, on peut étudier le deuxième en fonction du premier.
  - ❑ Itinéraires de découverte

    Nombre d'or et plantes, nombre d'or et peinture, nombre d'or et architecture.

- Après le collège et bien après
  - ❑ Arithmétique (suites de Fibonacci en entiers strictement positifs)

    Quel est le plus petit nombre intervenant en dixième (ou autre) position dans chacune de deux suites de Fibonacci ?

    Même question pour la n^{e} position ?

    Même question pour la n^{e} position dans p suites de Fibonacci ?
  - ❑ Logarithmes et exponentielles (suites multiplicatives)

    Le premier et le dernier terme étant donnés, comment choisir le deuxième ?

    Le dernier terme étant donné, comment choisir l'avant-dernier pour que tous les termes de la suite soient supérieurs à 1 ?

- À tous les niveaux

  Ces situations sont particulièrement simples à exploiter sur tableur. La question est de savoir si l'outil informatique est pertinent (et si oui, à quel moment) pour les objectifs visés.

6. Bilan et limites

Pour dresser un bilan, le cadre des suites de Fibonacci permet d'aborder ou de revoir les différents points suivants :

- Le calcul avec des nombres négatifs.
- La soustraction d'une différence.
- Le calcul avec des nombres en écriture fractionnaire.
- Le calcul littéral.
- La distinction entre inconnue et variable (mot très peu utilisé dans les programmes officiels, et peut-être encore moins en classe).
- La mise en équation, et la résolution.
- Les inéquations.
- Les systèmes d'inéquations à une inconnue.
- Les systèmes d'équations à deux inconnues.

La très grande richesse de cette situation impose que des choix soient faits dans les objectifs visés. Vouloir traiter tous ces points du programme avec la même situation de départ conduirait à la lassitude. Il faut au minimum laisser du temps entre deux utilisations pour des objectifs distincts.

Pour ma part, elle m'a fait prendre conscience de l'insuffisance (voire de l'inexistence) d'explications que je donnais sur le statut des « lettres » dans les activités algébriques.

Annexe

Pour chacune des suites ci-dessous, il n'y a qu'une possibilité pour qu'elle soit en entiers positifs :

(c)										178
(d)										301

En effet, écrivons les premiers termes en fonction du dernier, a, et de l'avant-dernier, x :

$34x-21a$	$13a-21x$	$13x-8a$	$5a-8x$	$5x-3a$	$2a-3x$	$2x-a$	$a-x$	x	a

Il faut donc que $34x$ soit supérieur à $21a$ et que $21x$ soit inférieur à $13a$. Je laisse au lecteur le soin de le faire pour les deux valeurs de a : 178 et 301.

À un autre niveau, on peut se faire plaisir à résoudre les équations diophantiennes : $21a + 34b = 178$ et $21a + 34b = 301$.