

Mathématiques = Démonstration ?(*)

Man Keung Siu(**)

Démontrer, qu'est ce que cela veut dire? Comme tout le monde le sait, on n'a pas besoin d'une définition détaillée. Disons que l'on veut savoir si la proposition suivante est correcte ou non : $\langle \text{Si } p \text{ alors } q \rangle$. Et le processus consistant à déterminer si cette proposition est vraie ou fausse (processus appelé « démonstration ») n'utilisera que des concepts de base (*définitions*), des hypothèses fondamentales (*axiomes*), des résultats déjà établis (*théorèmes*), et des arguments logiques.

Donnons un exemple classique, qui est à la fois un théorème ancien et important, la proposition 47 du livre 1 des *Éléments* d'Euclide, connu sous le nom de théorème de Pythagore. En voici l'énoncé : « Dans un triangle rectangle, l'aire du carré sur le côté opposé à l'angle droit est égale à la somme des aires des carrés sur les côtés adjacents à l'angle droit ». Le lecteur trouvera de nombreuses démonstrations dans les manuels de géométrie. On connaît l'histoire du philosophe anglais Hobbes, qui, un jour chez un ami, a vu sur la table un livre ouvert à la page de ce théorème. Il avait à ce moment là 40 ans et n'avait jamais appris la géométrie. Il a jeté un coup d'œil et s'est dit : « Comment cela est-il possible ? ». Pour satisfaire sa curiosité il a poursuivi la lecture afin de trouver l'explication. Cependant la démonstration utilisait un théorème précédent, qu'il a décidé de regarder aussi. Mais ce dernier utilisait un théorème encore plus ancien, et il est donc remonté encore plus loin. Et il a ainsi continué toute la journée jusqu'à comprendre totalement cette proposition 47. Et c'est ainsi qu'il a commencé à aimer la géométrie !

Il n'y a peut-être pas beaucoup de gens comme Hobbes qui tombent amoureux des mathématiques à cause du raisonnement logique, mais il y en a aussi beaucoup qui pensent que les mathématiques ne sont que des déductions logiques et des calculs fastidieux, et qui reculent devant elles. La démarche de Hobbes ou celle qui consiste à partir de certaines hypothèses pour arriver à l'aide d'arguments rigoureusement logiques à la conclusion visée sont le cœur des mathématiques et font que certains les aiment et d'autres les détestent. D'aucuns vont même jusqu'à réduire les mathématiques aux démonstrations : mathématiques = démonstration !

L'origine de cette idée se trouve dans les controverses au sujet des fondements des mathématiques au début du 20^e siècle, et en particulier à propos des controverses entre logicisme et formalisme. Regardons quelques citations illustrant ce contexte :

(*) Traduction par Mme F. K. Chan que l'auteur remercie vivement, d'un article paru (en chinois) dans *Shuxue Chuanbo (Mathmedia)* Vol. 16, N° 4 (1992), p. 50-58, et résumant un livre (en chinois) de l'auteur, intitulé *Démonstration mathématique* (la Maison d'édition éducative de Jiangsu, 1990).

(**) Département de Mathématiques. Université de Hong Kong.

Les mathématiques, dans leur signification la plus large, sont le développement de tous les types de raisonnement déductif, formel et nécessaire. A.N. Whitehead (1898).
Les mathématiques pures constituent la classe de toutes les propositions de la forme <p implique q>, où p et q sont des propositions. B. Russell (1903).
Les mathématiques sont une collection hétéroclite de techniques de la démonstration. L. Wittgenstein (1956).
Les mathématiques sont une science pour fabriquer des conclusions nécessaires. B. Peirce (1881).

Il faut signaler que ces vues philosophiques, concernant la cohérence et l'aspect non contradictoire des mathématiques, visent plutôt les mathématiques comme discipline académique et pas nécessairement les vues des ces auteurs sur les mathématiques en tant qu'activité intellectuelle. Ces points de vue ont dépassé le cadre d'une simple discussion académique et toute une vision générale des mathématiques s'est forgée. La plupart des gens ont oublié les raisons initiales de ce débat. On pense donc que le travail principal des mathématiciens est de prouver des théorèmes, et la démonstration se réduit à la seule technique déductive décrite plus haut.

Cependant si le travail d'un mathématicien se réduisait à la seule démonstration de théorèmes, alors celui d'un écrivain serait simplement d'écrire des phrases, celui d'un compositeur d'assembler des notes, celui d'un peintre de dessiner et de colorer. Et les poèmes de Li Bai se réduiraient à des compilations de phrases, les symphonies de Beethoven à des ensembles de notes, les peintures de Qi Bai Shi à des arrangements de lignes. Si les oeuvres littéraires, musicales et artistiques contiennent leurs propres idées et sentiments, pourquoi n'en serait-il pas de même des œuvres mathématiques ? Les idées et sentiments des mathématiques sont ce que l'on appelle souvent « la beauté mathématique ». Tout en admettant que la perception esthétique est une expérience personnelle, je ne suis pas encore capable d'en définir les contours profonds. Je me bornerai donc à discuter l'assertion (mathématiques = démonstration) du point de vue des mathématiques en tant qu'activité intellectuelle.

Commençons par prendre une perspective historique et revenons à la proposition 47 du premier livre des *Éléments*. La démonstration que donne Euclide de ce fameux théorème de Pythagore (en Chine on l'appelle le théorème de *Gougu*) semble être la première rapportée dans l'Histoire. Est-ce que cela signifie que les mathématiciens ne l'avaient pas trouvé jusqu'à cette époque (4^e siècle avant J.C.) ? Au Musée de l'Université Columbia aux États-Unis, on peut voir la fameuse tablette en terre *Plimton 322* qui date de l'époque babylonienne (19^e siècle avant J.-C., donc environ 1 500 ans avant Euclide). En 1943, le catalogue du Musée indiquait que cette

$(d/h)^2$	h	b	d
1.9834027	120	119	169
1.9491585	3456	3367	11521(4825)
1.9188021	4800	4601	6649
1.8862478	13500	12709	18541
1.8150076	72	65	97
1.7851928	360	319	481
1.7199836	2700	2291	3541
1.6927093	960	799	1249
1.6426694	600	541(481)	769
1.5861225	6480	4961	8161
1.5625000	60	45	75
1.4894168	2400	1679	2929
1.4500173	240	25921(161)	289
1.4302388	2700	1771	3229
1.3871604	90	56	53(106)

Figure 1

tablette, qui contient plusieurs rangs de nombres, était un compte commercial. Deux ans plus tard, les historiens Neugebauer et Sachs ont fait part de leur étonnante découverte : les nombres de chaque rang de cette tablette représentent un triplet de Pythagore, c'est-à-dire trois entiers positifs (h, b, d) tels que $h^2 + b^2 = d^2$ et qui peuvent donc être les mesures des côtés d'un triangle rectangle. En fait, sur la tablette, il n'y a que les valeurs de b et d . Cependant, on trouve dans la colonne à gauche les valeurs de $(d/h)^2$. De plus, dans cette colonne la différence entre deux nombres consécutifs est toujours 0,03 (voir figure 1). Quand on voit les trois nombres du quatrième rang (13 500, 12 709, 18 541), peut-on imaginer que les Babyloniens ne connaissaient pas le théorème de Pythagore et que ces nombres sont là par hasard ?

Référons-nous aussi à l'ancien document *Zhoubi Suanjing* (1^{er} siècle avant J.-C.) qui contient le paragraphe suivant : « Soit un rectangle dont la largeur est 3, la longueur est 4 et la diagonale est 5. Plaçons des carrés sur ses côtés. Coupons le rectangle en deux moitiés et prenons-en une. Tournons ce demi-rectangle et obtenons 3, 4, 5 ; la somme de l'aire des deux carrés est 25. Cela veut dire l'accumulation de rectangles. [...]

La largeur et la longueur sont élevées au carré. Prenons la racine carrée de la somme de ces deux carrés. » Il s'agit peut-être d'une démonstration du théorème de *Gougu* par une méthode de déplacement des triangles et des carrés (idée suggérée par Lih Ko-Wei de l'Institut mathématique de l'Académie Sinica à Taiwan) : en tournant le triangle rectangle donné autour du centre de symétrie du carré formé sur l'hypoténuse de ce triangle, on obtient alors trois autres triangles ayant les mêmes dimensions que le triangle donné, à savoir FCY, GYX et EXB dans la figure 2.

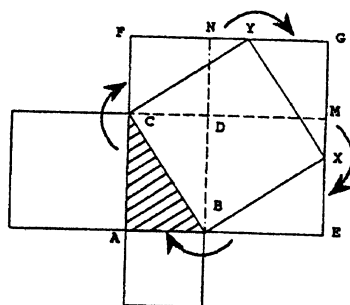


Figure 2

Il est facile de remarquer que

$$\text{aire}(AFGE) = \text{aire}(CDNF) + \text{aire}(BEMD) + 2 \times \text{aire}(ABDC)$$

et

$$\text{aire}(AFGE) = \text{aire}(BXYC) + 4 \times \text{aire}(ABC).$$

De là, on conclut que

$$\begin{aligned} \text{aire du carré sur AB} + \text{aire du carré sur AC} \\ = \text{aire du carré sur BC}. \end{aligned}$$

Dans une annotation de *Zhoubi Suanjing* écrite par Zhao Shuang, mathématicien chinois de l'époque des Trois Royaumes (3^e siècle après J.-C.), on trouve une démonstration similaire (voir figure 3a). Le

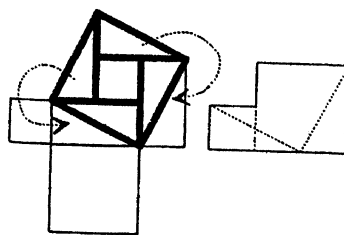


Figure 3a

Figure 3b

mathématicien indien Bhaskara (12^e siècle) a proposé une idée voisine. Mais il n'a donné qu'une figure (figure 3b) avec une exclamation : « Voilà ! ». Toutes ces démonstrations sont différentes de celle qui se trouve dans les *Éléments*.

Il semble donc que la connaissance du théorème de Pythagore ne trouve ni son origine, ni son aboutissement chez Euclide. Au contraire, il est évident que les mathématiciens n'ont trouvé que peu à peu des démonstrations rigoureuses de ce théorème, après en avoir compris le sens. On trouve souvent des processus semblables dans l'histoire des mathématiques : le développement du calcul différentiel et intégral en est un exemple typique. Ce n'est donc pas étonnant que même le mathématicien anglais De Morgan ait dit : « La source de la puissance des mathématiques ne vient pas de la démonstration mais de l'imagination ».

Pourquoi les gens croient-ils aux théorèmes qui ne sont pas démontrés avec rigueur ? Certes, il y a des résultats auxquels on croit sans aucun soupçon. Par exemple, deux hauteurs d'un triangle sont sécantes ; la somme des carrés de deux nombres réels est au moins égal à zéro ; deux angles opposés par le sommet sont égaux ; deux droites dans l'espace chacune parallèle à une même troisième sont parallèles entre elles. D'autres résultats sont moins évidents, mais ils sont quand même plausibles de par les observations ou les expérimentations. Par exemple, les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes ; la somme des carrés de deux nombres réels est au moins égale à deux fois le produit de ces deux nombres. Puis, il y a des assertions qui semblent être abstraites, mais qui ont une traduction physique qui les rend plausibles. Par exemple, une fonction dont la dérivée est partout égale à zéro est une fonction constante. L'interprétation de cet énoncé est évidente en physique : si une particule a une vitesse toujours égale à zéro, elle est immobile ! Cependant, il y a une autre grande catégorie de théorèmes qui diffère des précédentes. Comment peut-on y croire sinon par la démonstration ?

Les théorèmes moins évidents s'appuient souvent sur des arguments fort convaincants. Voyons un exemple concernant les nombres premiers. Les premiers semblent apparaître par hasard. Ainsi, si on se demande : entre deux nombres a et b combien y a-t-il de nombres premiers ? où se trouvent les nombres premiers ? combien y a-t-il d'entiers entre deux premiers successifs ? Examinons quelques situations : Entre 0 et 99 (100 nombres) il y a 25 premiers parmi lesquels huit paires de premiers jumeaux (premiers strictement supérieurs à 2 dont la différence est égale au minimum possible : 2) ; entre 9 999 900 et 10 000 000 (il s'agit aussi de 100 nombres entiers consécutifs) il n'y a que deux nombres premiers et leur différence est 60. La distribution des premiers semble totalement chaotique. Cependant, Legendre et Gauss ont observé un comportement qui peut se décrire mathématiquement. Considérons les données dans la figure 4 où $\pi(N)$ représente le nombre de premiers entre 1 et N , et que $\pi(N)/N$ la « densité » des premiers dans cet intervalle.

N	$\pi(N)$	$\frac{\pi(N)}{N}$
10	4	0,4
10 ²	25	0,25
10 ³	168	0,168
10 ⁴	1229	0,1229
10 ⁵	9592	0,09592
10 ⁶	78498	0,078498
10 ⁷	664577	0,0664577
10 ⁸	5761455	0,05761455
10 ⁹	50847354	0,050847354
10 ¹⁰	455052512	0,0455052512

Figure 4

Multiplions les nombres de la colonne à droite respectivement par 1, 2, 3, 4, ..., c'est-à-dire par $\log N$, les résultats ont des valeurs comprises entre 0,4 et 0,5 et semblent converger vers un certain nombre constant c . D'où on propose l'hypothèse:

$$\pi(N)/N \times \log N \sim c$$

ou encore

$$\pi(N) \sim c \times N/\log N.$$

En posant $c = \log e$, nous obtenons :

$$\pi(N) \sim N/\log_e N.$$

Alors, à partir de la valeur de c , on peut déduire la valeur de e , qui est 2,718 2..., base du logarithme naturel. $\log_e N$ est donc simplement le logarithme naturel du nombre N . Cette hypothèse n'a été démontrée que dans les dernières années du 19^e siècle, et elle est donc devenue un théorème. Puisque nous n'arrivons pas à trouver une règle sur la distribution locale des premiers et que pourtant nous avons trouvé un très beau résultat sur leur distribution globale, on peut considérer que tous les premiers apparaissent au hasard selon une distribution prévue par ce théorème ! Cela veut dire que l'on joue à pile ou face avec une pièce qui est faite de telle sorte que quand on la lance N coups, la probabilité d'obtenir le côté face est $1/\log_e N$, et que si parmi les N lancers, face apparaît au lancer k , le nombre k est premier, sinon il est composé. (À strictement parler, c'est totalement absurde ! Un nombre k est soit premier, soit composé. Comment le lancer à pile ou face peut-il changer ce fait ? Soyons patients et continuons à lire ce qui suit)

À l'exclusion de 2, tous les premiers sont impairs, et la différence de valeurs entre deux premiers est donc au moins 2. Deux premiers dont les valeurs diffèrent par 2 sont appelés, comme nous l'avons déjà dit plus haut, premiers jumeaux (par exemple : 3 et 5, 5 et 7, 11 et 13, etc.). Il y a une conjecture célèbre concernant les premiers jumeaux: Il en existe une infinité, même s'ils deviennent de plus en plus rares ! Utilisons l'analogie du lancer à pile ou face pour mieux comprendre cette conjecture. On se demande quelle est la probabilité d'avoir une paire de premiers jumeaux entre 1 et N ou encore lorsqu'on fait N lancers à pile ou face, quelle est la probabilité d'obtenir face aux k et au $(k + 2)$ -ième lancers. On estime cette probabilité approximativement à $1/(\log_e N)^2$. C'est à dire qu'on attend $N/(\log_e N)^2$ paires de premiers jumeaux. Comme obtenir face au lancer k (avec k premier) et aussi au lancer $(k + 2)$ (avec $k + 2$ premier) ne sont pas exactement deux événements indépendants, il faut faire des ajustements sur cette formule. Sans rentrer dans les détails, on obtient la formule plus précise :

$$(1,32...) \times N/(\log_e N)^2 \quad (*)$$

Il est frappant de constater que cette formule est tout à fait en adéquation avec l'observation (voir figure 5).

Intervalle	Nombre véritable de paires de premiers jumeaux	Nombre de paires de premiers jumeaux par estimation
10^9 à $10^9 + 150,000$	466	461
10^{10} à $10^{10} + 150,000$	389	374
10^{11} à $10^{11} + 150,000$	276	309
10^{12} à $10^{12} + 150,000$	276	259
10^{13} à $10^{13} + 150,000$	208	221
10^{14} à $10^{14} + 150,000$	186	191
10^{15} à $10^{15} + 150,000$	161	166

Figure 5

On pourrait alors croire que la distribution des premiers jumeaux est telle qu'on vient de la décrire. Mais jusqu'à maintenant, aucun mathématicien n'est arrivé à le démontrer ! Comme $N/(\log_e N)^2$ croît avec N , si la formule (*) représente vraiment la distribution des premiers jumeaux, alors la conjecture qu'il existe une infinité de premiers jumeaux serait prouvée.

• Si beaucoup d'observations, d'expériences confirment une assertion, pourquoi faut-il quand même la démontrer ?

Il n'y a pas que le vulgum pecus qui ne comprend pas pourquoi les mathématiciens tiennent tellement à la démonstration, mais même parfois des scientifiques de grand renom. Lors de sa jeunesse, le mathématicien Harish-Chandra était assistant auprès du physicien théoricien Dirac. Un jour il dit à Dirac qu'il était très frustré de ne pas pouvoir réussir à démontrer une assertion qu'il pensait correcte. Dirac lui a répondu : « Je me moque de la démonstration ! Ce que je veux, c'est la vérité ! ».

Normalement, les évidences circonstanciées se partagent en trois catégories: celles relevant de l'intuition géométrique, celles relevant de l'induction et celles obtenues par analogie.

Voyons d'abord un exemple d'intuition géométrique. En 1908, Félix Klein a présenté un exemple auquel on fera largement référence plus loin : il a « prouvé » que tous les triangles sont isocèles ! Sur le triangle ABC, la perpendiculaire au côté BC passant par D (milieu de BC) et la bissectrice de l'angle ABC se coupent en O (voir figure 6a). Par O, on mène les perpendiculaires aux côtés AB, AC respectivement en E et F. On trouve alors plusieurs paires de triangles isométriques. D'où

$$AE = AF, BE = CF.$$

Alors,

$$AB = AE + BE = AF + CF = AC.$$

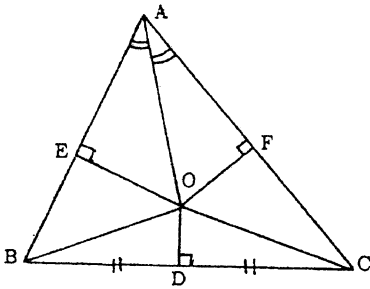


Figure 6a

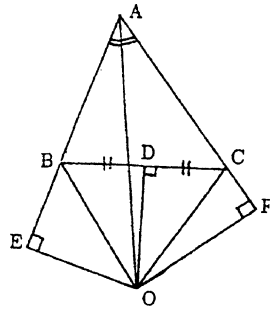


Figure 6b

Vous pouvez critiquer cet argument en disant que le point D peut se trouver à l'extérieur du triangle (voir figure 6b). Mais même dans ce cas, on peut quand même mener de la même façon les perpendiculaires OE et OF et par un argument semblable on obtient :

$$AB = AE - BE = AF - CF = AC$$

et la conclusion reste la même. Où est le piège ? Si le lecteur dessine une figure avec précision, il peut le détecter. En géométrie les théorèmes doivent s'obtenir à partir d'un système d'axiomes et de raisonnements déductifs, s'appuyant sans doute sur des esquisses, mais en aucun cas ce n'est pas telle ou telle figure particulière qui doit justifier la conclusion.

Observons maintenant un exemple d'induction. Pour cela posons -nous la question de savoir si pour $y \neq 0$ l'expression $1 + 141 y^2$ peut être un carré parfait ? Cela équivaut à résoudre en nombres entiers l'équation :

$$x^2 - 141 y^2 = 1.$$

Au 17^e siècle, Fermat avait déjà travaillé sur ce type d'équations. Plus tard Euler a attribué par erreur ce travail au mathématicien anglais Pell, et depuis nous parlons à leur sujet « d'équations de Pell ». La patience et les essais ne vous guideront guère, si ce n'est pour penser qu'il n'y a pas de solutions. On connaît pourtant depuis longtemps des solutions et on a même démontré qu'il y en avait une infinité. Mais la plus petite valeur de y est déjà extrêmement grande, à savoir $30\ 693\ 385\ 322\ 765\ 657\ 197\ 297\ 208 \sim 3 \times 10^{25}$ et la valeur correspondante de x est $1\ 036\ 782\ 394\ 157\ 963\ 237\ 125\ 215 \sim 10^{27}$.

Voyons enfin un exemple d'analogie. Au 3^e siècle avant J.-C., Archimède a démontré la formule de l'aire d'une ellipse : $A = \pi ab$ où a et b sont respectivement les mesures des moitiés du grand axe et du petit axe de l'ellipse. Si on pose $a = b = r$, l'ellipse se transforme en un cercle de rayon r , dont l'aire est $A = \pi r^2$. Or, considérons le carré qui circonscrit ce cercle. Le rapport des aires du cercle et de son carré circonscrit est $\pi/4$, et le rapport de leurs périmètres est aussi $\pi/4$. Comme le rapport des aires d'une ellipse et de son rectangle circonscrit est $\pi/4$, par analogie avec le cercle, on peut

penser que le rapport des périmètres de l'ellipse et de son rectangle circonscrit devrait être $\pi/4$, ce qui donnerait par analogie pour le périmètre de l'ellipse:

$$\pi/4 \times 4 \times (a + b) = \pi (a + b).$$

Et si on pose encore $a = b = r$, le périmètre du cercle est $2\pi r$, ce qui est exact. Au 13^e siècle après J.-C., le mathématicien italien Fibonacci a effectivement présenté une telle formule. Mais, aujourd'hui, nous savons qu'elle est incorrecte. La réalité est toute autre : le calcul du périmètre d'une ellipse n'est pas facile, et il n'existe pas de formule simple. Mais ce n'est qu'à la fin du 19^e siècle qu'on a démontré cela.

• Peut-on faire confiance à une démonstration?

Voici quelques anecdotes :

– Dans la préface du classique *Algebraic Coding Theory*, de Berlekamp (Université de Californie à Berkeley), traduit en plusieurs langues, l'auteur promet de donner 1\$ à la première personne qui trouvera une faute quelconque dans le livre. J'ai lu ce livre pendant l'hiver 1978 et j'ai repéré une faute, sans conséquence grave, dans la démonstration d'un théorème du chapitre 4. Je l'ai signalée à l'auteur. Quinze jours plus tard, il m'a répondu qu'il avait déjà offert ce dollar à quelqu'un 9 ans auparavant. À cette lettre il avait joint 13 pages d'errata où se trouvent 250 corrections de fautes plus ou moins importantes. L'auteur me disait aussi qu'il continuait de payer 3 ou 4 \$ chaque année pour tenir sa promesse. Et tout cela ne diminue en rien la grande valeur de cet ouvrage !

– En 1945, l'hebdomadaire américain *Times* annonçait une nouvelle sensationnelle : Rademacher, un mathématicien américain, avait trouvé une démonstration de l'une des conjectures les plus célèbres : la conjecture de Riemann.

– Au printemps de 1986, le journal américain *New York Times* a rapporté que le mathématicien anglais Rourke et le mathématicien portugais Rego ont résolu une autre fameuse conjecture, celle de Poincaré.

– Le numéro de mars 1988 de l'hebdomadaire américain *Newsweek* rapportait que le mathématicien japonais Miyaoka avait enfin démontré la plus grande conjecture de l'histoire des mathématiques, le théorème de Fermat (ce théorème a enfin été démontré en 1995 par Wiles et Taylor).

Toutes ces « démonstrations » étaient défectueuses et les deux premières conjectures résistent toujours. Et pourtant, personne n'a tenu rigueur à ces mathématiciens. Leurs efforts pourraient même contribuer un jour au succès final de ces problèmes. Il y en a maints exemples dans l'histoire des mathématiques. Reprenons le théorème de Fermat. La démonstration erronée du mathématicien français Lamé présentée le 1^{er} mars 1847 à l'Académie des Sciences de Paris aura une influence importante sur le développement de la théorie des nombres. On peut aussi considérer le fameux « problème des quatre couleurs » posé par le mathématicien anglais Cayley en 1878 (en fait, ce problème a été posé dès 1852 par un jeune anglais Guthrie en 1852 et fut rendu public par Morgan). En 1879, l'avocat anglais Kempe en a présenté une solution qui ne sera contestée que 11 ans plus tard par un autre mathématicien anglais Heawood. Mais cette « solution » fournira des bases aux recherches ultérieures qui, en 1976, ont abouti finalement à une démonstration à la suite de 1 200 heures de

travail sur ordinateur. Cela soulève une autre controverse : Peut-on accepter une démonstration par ordinateur comme démonstration mathématique ?

D'ailleurs, selon un rédacteur du *Mathematical Review*, presque une moitié des démonstrations paraissant dans cette prestigieuse revue seraient fausses, mais la plupart des assertions qu'elles sont censées démontrer sont correctes !

• Qui décide de la validité de la démonstration ?

En principe, chaque branche des mathématiques peut être formalisée, c'est-à-dire que les concepts fondamentaux peuvent se réduire à des symboles, que les axiomes et les assertions peuvent se réduire à des formules symboliques. Par exemple dans un tel système l'expression $1 + 1 = 2$ devient :

$$= (+ (s(0),s(0)),s(s(0))))).$$

La démonstration s'y réduit alors à une suite de formules symboliques, et la vérification de sa justesse devient un contrôle pour voir si le passage de chaque formule à la suivante respecte ou non les règles prédéterminées de ce système formel. Cela peut être accompli par une machine sans intervention humaine. C'est dans ce sens que, dans les années 1920, Hilbert proposa son grand projet en espérant pouvoir régler une fois pour toutes le problème de « cohérence » (sans contradiction) à l'intérieur des mathématiques.

Ce grand projet de formalisation fonctionne-t-il ? On rapporte qu'un étudiant polonais a prouvé le théorème de Pythagore en utilisant le système formel que Hilbert avait proposé dans son ouvrage *Grundlagen der Geometrie*. Cette démonstration remplit 80 pages ! Mais la longueur est un inconvénient secondaire. Pour régler le problème de « cohérence » à travers la symbolisation, le coup fatal est venu de deux théorèmes choquants proposés en 1939 par le mathématicien autrichien Gödel:

1. *Un système formel compatible avec l'arithmétique est incomplet, c'est-à-dire qu'il existe des assertions dans ce système qui ne peuvent ni être prouvées, ni être réfutées.*
2. *Un système formel compatible avec l'arithmétique ne peut pas établir sa propre cohérence.*

Quand les mathématiciens démontrent des théorèmes, travaillent-ils avec des déductions logiques et formelles ? Pas vraiment ! En réalité, ils ne fournissent que les points majeurs de leurs arguments. Bien entendu, il y a beaucoup de symboles et de formules, mais ce ne sont que des notations abrégées et qui n'ont que peu de rapports avec un système formel. L'activité mathématique est une activité humaine. Les démonstrations sont faites par des hommes, étudiées par des hommes, et validées par des hommes.

Il existe cependant des démonstrations fort longues et compliquées. Et on peut se demander s'il y a des personnes qui peuvent suivre de telles démonstrations du début jusqu'à la fin, y compris la vérification de tous les arguments et de tous les théorèmes

auxquels il est fait référence. Et même si c'est le cas, ces personnes peuvent-elles garantir de ne laisser passer aucune erreur ? La question de la classification des groupes finis en fournit un bon exemple : Combien y a-t-il de groupes distincts d'ordre N ? Depuis l'apparition de cette question, vers 1890, de nombreux mathématiciens se sont relayés pendant une centaine d'années, et sont enfin arrivés à une solution générale. La somme de leur travail représente plus de 5 000 pages. Il est douteux que ces 5 000 pages soient jamais scrutées en entier.

Dans ces dernières décennies, avec le développement de l'informatique, la « démonstration informatique » est apparue. Le premier exemple marquant est la démonstration du « théorème des quatre couleurs » présentée en 1976 par les mathématiciens américains Hale et Appel avec l'assistance de Loch. Ils ont utilisé au total 1 200 heures-ordinateurs. Mais cela n'est rien face au cas suivant. Lors de l'hiver 1988, une équipe dirigée par Clément Lam, de l'Université de Concordia, a présenté sa démonstration de la non-existence du plan projectif fini d'ordre 10. Ils ont utilisé le gros ordinateur CRAY-1A de l'Institut des Analyses de la Défense (IDA) des États-Unis ainsi que des ordinateurs de leur université, et ont travaillé pendant trois ans, en utilisant deux milliers d'heures-ordinateurs. Mais personne ne peut garantir qu'il n'y a pas d'erreur; et s'il en existe une, il serait difficile de décider si c'est un erreur mathématique ou simplement une erreur de programmation.

• Il semble que nous n'ayons parlé que des aspects négatifs des mathématiques : Il y a des théorèmes évidents que l'on n'a pas besoin de démontrer ! Il y en a d'autres déjà « démontrés » qui ne sont pas croyables ! Des facteurs humains pénètrent dans toutes les démonstrations ! Les mathématiques ont même une maladie incurable (indiquée par les deux théorèmes de Gödel) ! La démonstration mathématique est-elle vraiment utile ?

En réalité, la démonstration reste une étape essentielle dans la vérification des résultats mathématiques. Le mathématicien Weyl a dit : « La logique sert aux mathématiciens comme règle d'hygiène pour leur permettre d'avoir une pensée saine ». Un autre mathématicien renommé Weil a dit : « La rigueur pour les mathématiciens est comme la morale pour les humains ».

La démonstration a une autre fonction qui est peut-être la plus importante, elle nous aide à mieux comprendre les mathématiques. Dans un article intitulé *l'Architecture des mathématiques*, le groupe Bourbaki disait : « Tout mathématicien sait d'ailleurs qu'une démonstration n'est pas véritablement “ comprise ” tant qu'on s'est borné à vérifier pas à pas la correction des déductions qui y figurent, sans essayer de concevoir clairement les idées qui ont conduit à bâtir cette chaîne de déductions de préférence à toute autre ».

Voici une autre anecdote. En octobre 1903, le mathématicien américain Cole commença une conférence à l'American Mathematical Society en écrivant ces deux lignes au tableau:

$$2^{67} - 1 = 147\ 573\ 952\ 589\ 676\ 412\ 927$$

et

$$193\ 707\ 721 \times 761\ 838\ 257\ 287.$$

Puis, il effectua la multiplication de la deuxième ligne pour montrer que le produit donnait exactement le nombre de la première ligne. Cela veut dire qu'il voulut démontrer que $2^{67} - 1$ est un nombre composé, alors que depuis longtemps on le croyait premier. Pendant tout le processus il n'a rien dit. Lorsqu'il eut fini son calcul, un tonnerre d'applaudissements a éclaté. Plus tard, quelqu'un lui a demandé combien de temps il avait passé sur cette question. Il a répondu : « Tous les dimanches des trois dernières années ». Tout en admirant la persévérance de Cole, je ne trouve pas que cette démonstration puisse nous faire mieux comprendre le problème. Cela ne correspond pas à l'idée que le mathématicien russe Mann se faisait de la démonstration : « Une bonne démonstration doit nous rendre plus savant ». Si je reviens à l'exemple de Cole et vous dis seulement que

$$\sqrt{1+1141 \times 30\ 693\ 385\ 322\ 765\ 657\ 197\ 297\ 208^2}$$

$$= 1\ 036\ 782\ 394\ 157\ 963\ 237\ 125\ 215$$

vous ne comprendrez pas mieux la résolution de l'équation $x^2 - 1\ 141\ y^2 = 1$.

Permettez-moi de mettre l'accent sur ce point en vous renvoyant à un travail de Gauss concernant sa démonstration de la loi de réciprocité quadratique. Le lecteur n'a pas besoin de comprendre pourquoi cette loi est importante, il lui suffit de savoir que Gauss y était tellement attaché qu'il l'a nommée : « la perle de la théorie des nombres ». Expliquons d'abord ce qu'est un « résidu quadratique » : Soient a et m deux entiers premiers entre (c'est-à-dire sans facteur commun sauf 1). S'il existe un entier positif x tel que a et x^2 ont même reste dans la division par m , on dit que a est un résidu quadratique modulo m ; si un tel entier x n'existe pas, on dira que a n'est pas résidu quadratique modulo m . Par exemple, 3 est un résidu quadratique modulo 11, car le reste de 5^2 par 11 est 3. Mais 11 n'est pas résidu quadratique modulo 3 car le reste de 11 par 3 est 2 tandis que le reste de tout carré par 3 est soit 0, soit 1. Considérons à présent les premiers impairs a et m . Dans la table de la figure 7a, les nombres sur l'axe vertical sont les valeurs de a , et ceux sur l'axe horizontal sont les valeurs de m . Un carré noir indique que a est résidu quadratique modulo m , et un carré blanc indique que a n'est pas résidu quadratique modulo m (un carré marqué par \times indique que $a = m$).

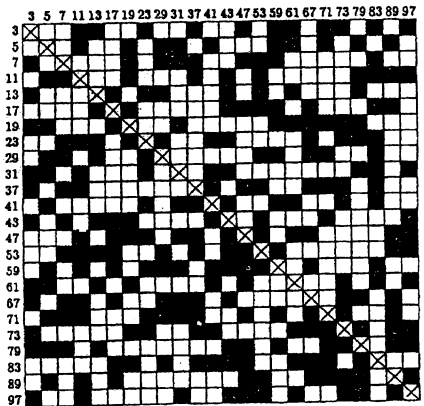


Figure 7a

Maintenant réarrangeons les axes tels que les nombres a et m de la forme $4t + 3$ se placent avant ceux de la forme $4t + 1$. On s'aperçoit alors que la table devient symétrique avec la diagonale comme axe de symétrie, sauf le coin en haut à gauche (à savoir les premiers a et m de la forme $4t + 3$ dont les valeurs varient de 3 à 83) qui lui est anti-symétrique du même axe. (figure 7b.)

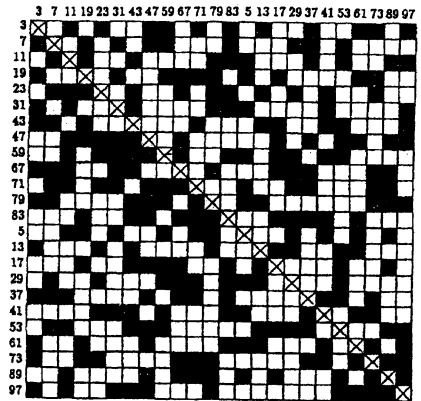


Figure 7b

Cette observation donne le contenu de la loi de la réciprocité quadratique. En 1783, Euler avait déjà mentionné un résultat équivalent. Mais, c'est Legendre qui lui a donné la formulation exacte et tenté de la prouver. Mais ces deux mathématiciens n'ont pas réussi à en obtenir une démonstration et c'est seulement en 1796 que Gauss a proposé une première démonstration. Par la suite il en a donné cinq de plus, la dernière ayant été rédigée en 1818. À travers ces six démonstrations différentes, Gauss a révélé plusieurs facettes du théorème qui nous font comprendre plus profondément la théorie des nombres et qui ouvrent le chemin des recherches ultérieures en ce domaine. En 1963, le mathématicien américain Gerstenhaber écrit dans *l'American Mathematical Monthly* un article d'une page avec un titre amusant : « La 152^e démonstration de la loi de réciprocité quadratique ». Plus récemment, dans la même revue américaine, on voit un article d'une demi-page écrite par un autre mathématicien américain Swan. Le titre en est : « Une autre démonstration de la réciprocité quadratique ». Si le but de la démonstration est de valider un théorème, on n'en a besoin que d'une. Pourquoi les mathématiciens en donnent-ils plusieurs pour le même théorème ?

Conclusion

Cet article essaie d'expliquer indirectement comment les mathématiques peuvent être une activité culturelle. Je n'y ai pas donné (ou tenté de donner) de réponse. Mais j'espère que le lecteur est d'accord avec l'opinion que les mathématiques ne sont pas seulement des formules logiques fastidieuses. Il est difficile de dire clairement ce que sont les mathématiques, cela dépend de l'expérience personnelle. Pour conclure, je cite une parole du mathématicien et pédagogue renommé Pólya : « La pensée mathématique n'est pas purement formelle. Il ne s'agit pas seulement d'axiomes, de théorèmes et de démonstrations strictes, mais beaucoup d'autres choses en font partie comme la généralisation des cas observés, des arguments inductifs, des arguments d'analogie, la reconnaissance d'un concept mathématique dans une situation concrète, l'extraction d'un concept mathématique depuis une situation concrète ».

BIBLIOGRAPHIE

DAVIS et HERSH. *L'univers mathématique*, Gauthier-Villars.

Enrico GUISTI. *La naissance des objets mathématiques*, Ellipses.

Évelyne BARBIN. *La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques*. Bulletin de l'APMEP N° 366 (1988).

Jean-Claude MARTZOFF. *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson.

Nouvelles brochures en co-diffusion :

« LA JUBILATION EN MATHÉMATIQUES »

par André Deledicq.

32 pages en A4.

Un régal de 19 situations...

Cf. Bulletin 433, page 263.

PRIX adhérent : 25 F (+ port : cf. page 418)

« ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DU PLAN » Cours et Exercices,

par Mehdi Abdeljaoud.

Deux Tomes (292 et 286 pages) à 50 F chacun (+ port)
Ouvrage qui conjugue outils classiques et modernes pour
maîtriser la géométrie élémentaire du Secondaire, ses
méthodes et voir aisément un peu au-delà...

Cf. Bulletin APMEP 433, pages 268-269.

Un ouvrage à ne pas manquer !