

Les problèmes de l'APMEP

Cette rubrique propose des problèmes choisis pour l'originalité de leur caractère : esthétique, subtil, ingénieux voire récréatif, dont la résolution nécessite initiatives, démarche inventive, recherche, effort intellectuel.

Elle accueille tous ceux qui aiment inventer, chercher de « beaux problèmes »... si possible trouver des solutions, et les invite à donner libre cours à leur imagination créatrice. La rubrique s'efforce de rendre compte de la pluralité des méthodes proposées par les lecteurs, des généralisations des problèmes...

Les auteurs sont priés de joindre les solutions aux propositions d'énoncés. Solutions et énoncés sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
42 quai de la Loire,
75019 Paris.

Solutions

Énoncé n° 276 (Michel LAFOND, 21-Dijon)

Quels sont les polyèdres convexes qui ne possèdent pas trois faces ayant le même nombre de côtés ?

SOLUTION

Cet énoncé s'inscrit dans le cadre d'un vaste travail de Michel LAFOND sur les polyèdres : à la même époque, celui-ci m'envoyait, à propos de l'avis de recherche n° 86, une étude exhaustive des 34 heptaèdres convexes. J'ai reçu quatre autres solutions, plus ou moins complètes, de Marie-Laure CHAILLOUT (95-Sarcelles), René MANZONI (76-Le Havre), Marguerite PONCHAUX (59-Lille) et Pierre RENFER (67-Ostwald).

Le problème se scinde en deux : premièrement, trouver quel nombre de faces, de sommets et d'arêtes doit avoir un polyèdre solution, et deuxièmement, déterminer tous les polyèdres solutions. C'est essentiellement sur ce second point que les réponses ont été inégales, les lecteurs proposant deux, trois ou quatre polyèdres solutions avec plus ou moins de justifications. Sans compter que, pour trouver tous les polyèdres solutions, il faut préciser à quelle condition deux polyèdres sont considérés comme équivalents, donc comme deux représentants de la même solution, ce qui n'est pas évident *a priori*. On peut, par exemple, considérer que deux polyèdres sont équivalents s'il existe deux bijections, de l'ensemble des faces du premier vers l'ensemble des faces du second et de l'ensemble des sommets du premier vers l'ensemble des sommets du second, telles que si un sommet du premier polyèdre appartient à une face, son image (sommet du second polyèdre) appartient à l'image de ladite face.

Pour la première partie du problème, il convient évidemment d'utiliser la relation d'Euler : si F , S et A désignent le nombre de faces, de sommets et d'arêtes d'un polyèdre convexe, $F + S = A + 2$. Comme chaque arête contient deux sommets, et chaque sommet appartient à au moins trois arêtes, on a : $2A \geq 3S = 3(A + 2 - F)$, d'où $A \leq 3F - 6$. Pour obtenir une majoration de A , l'idée la plus astucieuse me semble être celle mise en œuvre par Marie-Laure CHAILLOUT et Pierre RENER : classons les faces par ordre croissant du nombre d'arêtes. Les $(2k-1)$ -ème et $(2k)$ -ième faces ont au moins $(k+2)$ arêtes, vu que, par hypothèse, le polyèdre n'a pas plus de deux faces triangulaires, de deux faces quadrilatérales, de deux faces pentagonales... Or chaque arête appartient à deux faces, donc

- si F est pair ($F = 2k$),

$$2A \geq (3+3) + \dots + ((k+2) + (k+2)) = k^2 + 5k ;$$

- si F est impair ($F = 2k + 1$),

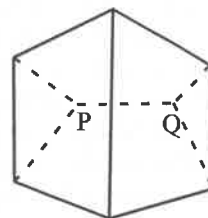
$$2A \geq (3+3) + \dots + ((k+2) + (k+2)) + (k+3) = k^2 + 6k + 3.$$

Dans le premier cas ($F = 2k$), on doit donc avoir : $k^2 + 5k \leq 2A \leq 12k - 12$, soit : $k^2 - 7k + 12 \leq 0$, ce qui n'est vérifié que pour $k = 3$ ou $k = 4$. Pour $k = 3$, $F = 6$, $A = 12$ (le majorant et le minorant de $2A$ sont égaux), d'où $S = 8$ d'après la relation d'Euler. Pour $k = 4$, le même raisonnement conduit à : $F = 8$, $A = 18$ et $S = 12$.

Dans le deuxième cas ($F = 2k + 1$), on doit avoir : $k^2 + 6k + 3 \leq 2A \leq 12k - 6$, soit : $k^2 - 6k + 9 \leq 0$, ce qui n'est vérifié que pour $k = 3$: on a alors $F = 7$, $A = 15$ donc $S = 10$.

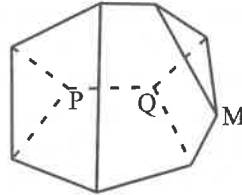
Il reste à déterminer tous les polyèdres solutions, dans chacun des trois cas ci-dessus : $F = 6$, $S = 8$, $A = 12$; $F = 7$, $S = 10$, $A = 15$; $F = 8$, $S = 12$, $A = 18$. On remarquera pour commencer que, dans chaque cas, la majoration et la minoration de A sont toutes deux des égalités. Pour la minoration, on a : $2A = 3S$, ce qui prouve que chaque sommet appartient exactement à trois arêtes, donc que deux faces qui ne sont pas disjointes ont obligatoirement une arête en commun (si elles n'avaient qu'un sommet commun, de ce sommet partiraient quatre arêtes). Pour la majoration, le fait qu'elle soit une égalité entraîne que le polyèdre a exactement deux faces triangulaires, deux faces quadrilatérales, deux faces pentagonales, et zéro, une ou deux faces hexagonales.

Dans le cas où $F = 6$, $S = 8$, $A = 12$, les deux faces pentagonales ne sont pas disjointes (cela ferait 10 sommets), elles ont donc une arête PQ en commun. Ces deux faces à elles seules définissent 8 sommets et 9 arêtes du polyèdre : celui-ci n'a pas d'autre sommet, et il a trois autres arêtes, qui nécessairement joignent chacune un sommet d'un pentagone à un sommet de l'autre pentagone. S'agissant d'un polyèdre convexe, cela laisse une seule possibilité.

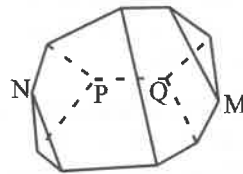


Lorsque $F = 7$, $S = 10$, $A = 15$, le polyèdre a une face hexagonale en plus des deux faces pentagonales. Considérons la face hexagonale et l'une quelconque des faces

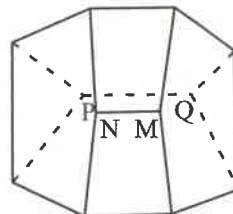
pentagonales : elles ne peuvent pas être disjointes, cela ferait 11 sommets, elles ont donc une arête PQ en commun. Elles définissent à elles seules 9 sommets et 10 arêtes, il reste donc un sommet M et cinq arêtes. De M partent obligatoirement trois arêtes, et les deux dernières arêtes joignent un sommet de l'hexagone à un sommet du pentagone. Donc deux des arêtes issues de M atteignent deux sommets (nécessairement voisins) de l'hexagone, définissant une face triangulaire, l'autre arête atteint un sommet du pentagone et délimite deux faces dont une seule (au plus) est un pentagone (il n'y a que deux faces pentagonales en tout) : l'autre contient donc nécessairement P ou Q, ce qui laisse une seule possibilité à équivalence près.



Lorsque $F = 8$, $S = 12$, $A = 18$, le polyèdre a deux faces hexagonales, qui ne sont pas disjointes, sinon il n'y aurait pas d'autre sommet que ceux des hexagones et une face pentagonale aurait trois sommets communs avec un hexagone, ce qui est absurde. Les deux hexagones ont donc une arête PQ en commun, ils définissent 10 sommets et 11 arêtes du polyèdre, il reste deux sommets M et N et 7 arêtes. Mais là, il convient de distinguer deux cas : soit M et N sont joints par une arête, soit ils ne sont pas joints par une arête. Dans ce second cas, de M partent trois arêtes, de N partent trois arêtes, et il reste une septième arête joignant un sommet d'un hexagone à un sommet de l'autre hexagone. Deux des arêtes issues de M atteignent deux sommets voisins d'un hexagone, définissant une face triangulaire, et deux arêtes issues de N atteignent deux sommets voisins de l'autre hexagone (sinon il ne resterait pas de sommet libre pour la septième arête), définissant une seconde face triangulaire. Il n'existe donc pas d'autre face triangulaire, donc l'arête restante ne peut pas joindre les deux sommets voisins de P ni les deux sommets voisins de Q : les deux sommets voisins de P sont donc joints à N et les deux sommets voisins de Q, à M (ou inversement), ce qui laisse, en définitive, une seule possibilité à équivalence près.

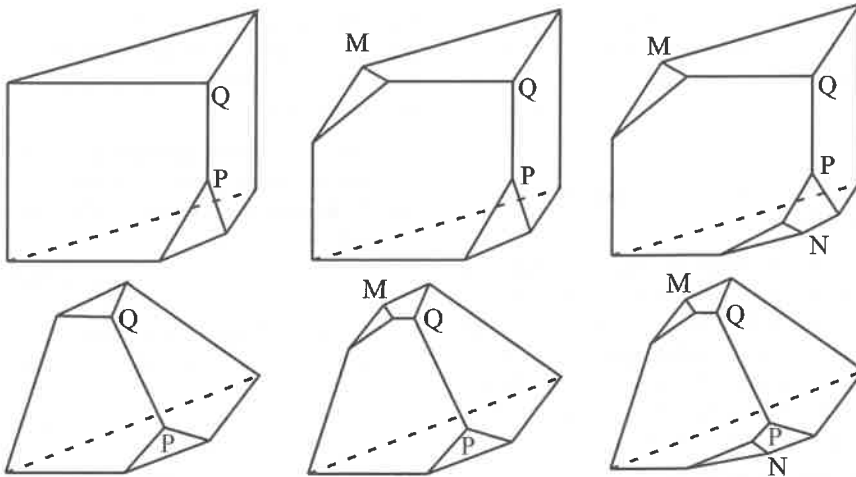
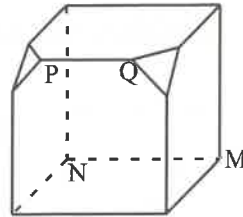


Reste le cas où M et N sont joints par une arête : par M ou N passent 5 arêtes en tout, il en reste deux joignant un sommet de l'hexagone à un sommet de l'autre hexagone. Chaque face pentagonale a au plus deux sommets communs avec chaque hexagone, et au plus deux sommets dans $\{M, N\}$: elle a donc nécessairement un sommet au moins dans chacun des trois ensembles, donc une arête commune avec chaque hexagone, et un cinquième sommet égal à M ou N. Comme elles ne peuvent pas avoir en commun un et un seul point, M appartient à une face pentagonale, N à l'autre. Les deux arêtes issues de M (autres que MN), qui délimitent le pentagone, atteignent donc chacun des hexagones, et de même pour les deux arêtes issues de N. Les deux arêtes restantes appartiennent obligatoirement chacune à une face pentagonale et à une face



triangulaire, qui contient donc P ou Q, ce qui laisse une seule possibilité à équivalence près.

On remarquera que cette quatrième et dernière solution équivaut à un cube tronqué en deux sommets voisins. Les trois premières solutions équivalent, elles, à des prismes triangulaires tronqués une, deux ou trois fois. Si l'on redescend le point à l'infini intersection des arêtes verticales, ledit prisme équivaut à un tétraèdre décapité, donc ces trois premières solutions équivalent à des tétraèdres tronqués deux, trois ou quatre fois.



Adhérents APMEP d'IUFM, du Supérieur, ..., Régionales,

**FAITES CONNAÎTRE NOS BROCHURES
AUPRÈS DES ÉTUDIANTS,**

et particulièrement

**NOS BROCHURES DÉTAILLÉES
DE CONCOURS**

– N^{os} 134 et 127 **ensemble** (CAPES externes et CA/PLP2 externes et internes 1998, 1999, 2000). Cf. Bulletins 431, p. 846-847 et 426, p. 112.

Adhérent ou **étudiant** : 55 F.

– N^{os} 134, 127 et 117 **ensemble** (plus six concours 1996 et 1997). Cf. Bulletins déjà cités et 413, p. 801-802

Adhérent ou **étudiant** : 84 F.