

Avis de recherche

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc.

Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet et votre nom sur chacune, et, si possible, le texte sur disquette (avec enveloppe affranchie si vous souhaitez son retour) à :

Robert FERRÉOL
6, rue des annelets
75019 PARIS.

par Internet : rferreol@club-internet.fr

Nouvel avis de recherche

Avis de recherche n° 125 transmis par Annie Michel-Pajus.

Quels sont les modes de calcul de l'espérance de vie ?

(En espérant que cette question aura plus de succès que mon AR sur la fixation des taux de change...)

Ancien avis de recherche

Avis de recherche n° 114 sur les nombres figurés (cf. bulletin 429, p. 497)

Contribution de Jean Moreau de Saint Martin (Paris).

Je suis étonné d'une indication donnée par P. Bornsztejn dans sa réponse à l'avis de recherche 114, selon laquelle un recours aux courbes elliptiques serait nécessaire pour trouver les carrés impairs qui sont des nombres tétraédriques.

Ce problème se résout par des moyens élémentaires, comme je vais le montrer ci-dessous. Il doit y avoir confusion avec le « cas impair du problème de Lucas (pyramidaux carrés) », dont maintenant des solutions élémentaires sont connues, comme P. Bornsztejn le signale.

Soit donc $y(y+1)(y+2) = 6x^2$ avec x impair.

Aucun des facteurs $y, y+1, y+2$ n'est multiple de 4, leurs restes modulo 4 sont donc 1, 2, 3 dans cet ordre.

Les diviseurs premiers de x se répartissent en trois facteurs a, b, c , qui sont impairs et dont les carrés divisent respectivement $y, y+1, y+2$. Ces carrés ont pour reste 1 modulo 4, ce qui entraîne que $y, y+1, y+2$ valent respectivement $a^2, 2b^2, 3c^2$. En outre a, b, c sont premiers deux à deux.

On en tire $y+2 = 3c^2 = a^2 + 2 = 2b^2 + 1 = 4b^2 - a^2 = (2b+a)(2b-a)$.

Je vais utiliser deux fois la propriété :

(P) Si les facteurs d'un produit sont deux à deux premiers entre eux, tout diviseur premier qui divise un facteur y a le même exposant que dans le produit.

Celui des facteurs $(2b + a)$ et $(2b - a)$ qui n'est pas multiple de 3 est un carré, car ces facteurs sont premiers entre eux et ont pour produit $3c^2$. Quitte à changer le signe de a , je peux supposer que c'est $2b - a = u^2$, carré impair : $u = 2t + 1$.

On a ensuite $1 = 2b^2 - a^2 = (2b - a)^2 - 2(a - b)^2$.

$\frac{a-b}{2}$ est un entier de carré : $\frac{u^4 - 1}{8} = t(t+1)(2t(t+1)+1)$.

Dans ce dernier produit, il est clair que les trois facteurs sont deux à deux premiers entre eux. Le produit étant un carré, s'il est non nul ($t > 0$), par (P) chacun des facteurs est un carré et les entiers consécutifs t et $t + 1$ seraient tous deux des carrés. C'est impossible.

Il en résulte $t = 0$, $u = 1$, puis $a = b = c = 1$, $x = y = 1$. CQFD.

Avis de recherche n° 123 :

Dans son excellent livre : « Visions géométriques », Belin, 1993, Ian Stewart donne (page 15) une formule donnant l'équation de la conique des positions possibles d'un point P pour un birapport du faisceau de droites (PA), (PB), (PC), (PD) donné. Où peut-on trouver une démonstration de cette formule ?

Réponse de Jacques Bouteloup (Rouen), qui précise que ce problème lui a été posé en 1945 lors de sa préparation à l'agrégation, que la solution qu'il en donne ici est celle qu'il avait donnée à l'époque, et qu'il n'a jamais vu la question évoquée dans aucun livre.

Étant donnés quatre points A, B, C, D distincts fixés dans le plan, il s'agit donc d'établir l'équation de l'ensemble des points P du plan tels que le birapport ((PA),(PB),(PC),(PD)) soit égal à une constante r donnée.

C'est un problème projectif. Mais nous le résoudrons par un calcul affine, ce qui est plus commode et nous conduira à une équation analogue à celle du livre de Ian Stewart. Nous supposons donc les points non à l'infini.

Le birapport de quatre droites concourantes, dont les équations peuvent s'écrire $y - y_0 = m(x - x_0)$ pour quatre valeurs de m , est le birapport de leurs points à l'infini, qui peuvent être représentés par $(1, m)$, donc celui des paramètres m . C'est encore valable si l'une est parallèle à Oy, en acceptant, ce qui est loisible, la valeur ∞ dans le birapport.

Désignons par (x_i, y_i) les coordonnées des points donnés ($i = A, B, C, D$), et par (x, y)

celles de P. Le paramètre m de (PA) est $t_A = \frac{y - y_A}{x - x_A}$. Nous introduisons de même t_B ,

t_C, t_D .

Nous aurons donc, pour $((PA),(PB),(PC),(PD)) = r$, la relation $(t_A, t_B, t_C, t_D) = r$ qui s'écrit :

$$(t_C - t_A)(t_D - t_B) - r(t_C - t_B)(t_D - t_A) = 0.$$

Or

$$t_C - t_A = \frac{\begin{vmatrix} x - x_A & x - x_C \\ y - y_A & y - y_C \end{vmatrix}}{(x - x_C)(x - x_A)} = \frac{\Delta(A, C)}{(x - x_C)(x - x_A)}.$$

$\Delta(A, C)$ est un polynôme en (x, y) du premier degré, et $\Delta(A, C) = 0$ représente une équation de (AC) . Nous définissons de façon analogue les autres fonctions Δ de deux lettres. Après multiplication par $(x - x_A)(x - x_B)(x - x_C)(x - x_D)$, nous obtenons l'équation de la conique décrite par les points P sous la forme :

$$\Delta(A, C) \Delta(B, D) - r \Delta(A, D) \Delta(B, C) = 0.$$

Elle passe par A, B, C, D (les coordonnées de A, par exemple, annulent $\Delta(A, C)$ et $\Delta(A, D)$). On la retrouve aisément par analogie avec l'expression du birapport de quatre points A, B, C, D alignés : $\overline{AC} \cdot \overline{BD} - r \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.

Dans son article « D'où a été prise la photo ? » de « Pour la Science » (Février 1990), article repris tel quel dans l'ouvrage « Visions géométriques », Ian Stewart donne, avec mes notations, l'équation apparemment différente :

$$(r - 1) \Delta(A, C) \Delta(B, D) - r \Delta(A, B) \Delta(D, C) = 0.$$

Mais la suite des quatre droites (PA) , (PB) , (PC) , (PD) présente 24 permutations, conduisant à six valeurs en général distinctes du birapport, chacune obtenue quatre

fois. La permutation de B et D donne $((PA),(PD),(PC),(PB)) = \frac{r}{r-1}$. Les deux équations sont donc identiques.

Dans cet article, Ian Stewart développait une méthode pour résoudre le problème posé par le titre utilisant notamment cette équation. C'est en fait une méthode non rigoureuse, ne conduisant qu'à un résultat approché. En réponse à mes questions, Ian Stewart m'a écrit qu'elle était valable lorsque le photographe était « très près » du sol.

Il m'apparaît bon de dire quelques mots du problème projectif général. Désignons par $E(A, C) = 0$, $E(B, D) = 0$, $E(A, D) = 0$, $E(B, C) = 0$ des équations de (AC) , (BD) , (AD) , (BC) dans un repère projectif quelconque. L'équation

$$E(A, C) E(B, D) - k E(A, D) E(B, C) = 0$$

représente une conique passant par A, B, C, D. On démontre que le birapport $((PA),(PB),(PC),(PD))$ demeure constant lorsque P parcourt la conique, et qu'on obtient une autre valeur pour k différent, ce qui résout le problème général du lieu évoqué. Mais les premiers membres des équations n'étant définis qu'à un facteur multiplicatif près, ce birapport r n'a aucune raison d'être égal à k . Cependant, trois équations étant fixées, k prend toutes valeurs lorsque le facteur multiplicatif de la quatrième varie. On peut donc choisir la bonne équation pour que $k = r$, et obtenir ainsi une équation analogue à l'équation affine. L'intérêt du calcul élémentaire du début est que les « bonnes » équations se sont introduites automatiquement.