Dénombrement des polyèdres convexes

Michel Lafond

Depuis de nombreuses années je me posais la question suivante : « **Combien y a t-il de polyèdres convexes distincts à *n* faces ?** ».

Je savais qu'il y a un seul tétraèdre et deux pentaèdres (dessinés dans 4)

Pour la suite j'étais dans l'ignorance jusqu'à ce que je tombe sur un livre magique : « The encyclopedia of integer sequences » de N.J.A. SLOANE et Simon PLOUFFE chez Academic Press.

Ce livre référencie plus de 5 000 suites numériques à valeurs entières positives, lesquelles sont classées dans l'ordre lexicographique des premiers termes avec quelques commentaires et références, et éventuellement une formule ou une relation de récurrence.

Par exemple la suite à la référence M2981 est :

1,1,3,14,147,3462,294392 ... [1,3]

egyptian fractions : partitions of 1 into parts $1/n$, donc il y a 147 solutions à l'équation diophantienne $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}=1$.

En parcourant ce livre j'ai remarqué à la référence M1796 la suite

1,2,7,34,257,2606,32300,440564,6384634

polyedra with n nodes ... [4,2] qui donne donc à partir de $n = 4$ le nombre de polyèdres (convexes) ayant n sommets. Comme il y a autant de polyèdres à n sommets que de polyèdres à n faces (nous verrons pourquoi), j'avais la réponse à ma question en tous cas jusqu'à $n = 12$.

J'ai ainsi appris qu'il y avait 7 hexaèdres et 34 heptaèdres. Ce dernier résultat me sembla exagéré aussi je me suis amusé à les recenser et j'en ai bien trouvé 34 (ils sont dessinés à la fin). 257 octaèdres ce n'est déjà pas rien, mais plus de 6 millions de dodécaèdres c'est dur à digérer !

Ceux qui sont intéressés par ce livre mais qui ne veulent pas l'acheter peuvent comme il est dit dans la préface procéder ainsi pour avoir des renseignements sur une suite connaissant seulement les premiers termes :

Il faut disposer d'une adresse électronique (e-mail).

Si vous êtes connecté à Internet, il n'y a pas de problème, **mais ce n'est pas nécessaire** !.

Si vous êtes enseignant, votre lycée vous en donne une (CARAMAIL, LEMEL, ...).

Sinon il y a un moyen très simple que j'utilise encore : faire à partir d'un **simple minitel** le 3615 minitelnet et suivre les indications pour avoir un e-mail **gratuit**.

Bref, vous êtes dans votre messagerie préférée et à partir de là c'est enfantin :

Vous envoyez le courrier à l'adresse superseeker@research.att.com et à objet vous tapez lookup 3 4 5 7 9 12 16 22 30 42 58 81 113 (ou les premiers termes de votre suite séparés par des blancs).
Il n'y a plus qu'à envoyer le message (qui est vide) et à attendre. Des algorithmes très élaborés (décrits au début du livre) sont alors mis en œuvre et si votre suite n'est pas trop tordue vous obtiendrez une réponse par retour de courrier (électronique) (*attention les adresses électroniques peuvent changer*).

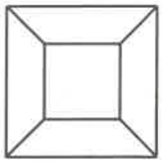
1) Avant d'entreprendre le dénombrement de tel ou tel type de polyèdre, une question se pose tout de suite : si on utilise les notations usuelles pour un polyèdre
S pour le nombre de sommets
F pour le nombre de faces
A pour le nombre d'arêtes,

Q1 : (S,F,A) étant un triplet d'entiers donnés, existe-t-il un polyèdre convexe ayant S sommets, F faces et A arêtes ?

La réponse à Q1 est non car S, F et A sont liés par la condition nécessaire suivante dite relation d'EULER :

$$S + F = A + 2 \qquad (1)$$

La démonstration de (1) est assez simple :



Si (P) est un polyèdre convexe donné, supprimons une face de (P) et, quitte à déformer un peu les faces, aplatissons-le de manière à se ramener à un polygone convexe (P′), pavé de F – 1 polygones, chacun correspondant à une face de (P).
Bien sûr on préserve la topologie, on ne fait que déformer (*la figure ci-contre montre l'aplatissement du cube.*)
Pour démontrer (1), il suffit de démontrer S + F = A + 1 dans (P′).
Pour cela posons $k = S + F - A$
De deux choses l'une :
Ou bien (P′) n'a pas de sommet intérieur et alors (P′) possède n sommets, une face, n arêtes donc $k = n + 1 - n = 1$.
Ou bien (P′) possède (au moins) un sommet intérieur. Supprimons ce sommet ainsi que les p arêtes qui en partent. La suppression fait perdre 1 sommet, p arêtes et $p - 1$ faces, donc k est inchangé. En supprimant de proche en proche tous les sommets intérieurs, on se ramènera (sans changer k) au cas précédent pour lequel on a vu que k valait 1. CQFD.

Puisqu'on a nécessairement S + F = A + 2 pour tout polyèdre, il suffit dans la question Q1 de se donner S et F. On dira dans la suite qu'**un polyèdre est de type (S,F) s'il a S sommets et F faces.**

La question Q1 devient :
Q2 : Étant donnés deux entiers S et F, existe-t-il un polyèdre de type (S,F) ?

Un théorème de STEINIZ répond à Q2 :
Il existe un polyèdre convexe de type (S,F) si et seulement si

$$\mathbf{S \geq 4 \quad et \quad \frac{1}{2}S + 2 \leq F \leq 2S - 4} \quad (2)$$

La démonstration de (2) faisait l'objet d'une question posée par Marc ROYER dans le bulletin n° 415 à propos de l'avis de recherche n° 86 sur les polyèdres convexes à 7 arêtes.

La voici :

Les conditions de* (2) *sont nécessaires :
S ≥ 4 sinon le polyèdre serait plan.
2 A ≥ 3 F car chaque face a au moins 3 arêtes, chacune comptée 2 fois.
2 A ≥ 3 S car de chaque face partent au moins 3 arêtes, chacune comptée 2 fois.
Donc

$$F = A - S + 2 \geq \frac{3}{2}S - S + 2 = \frac{1}{2}S + 2 \Rightarrow \mathbf{F \geq \frac{1}{2}S + 2},$$

$$S = A - F + 2 \geq \frac{3}{2}F - F + 2 = \frac{1}{2}F + 2 \Rightarrow \mathbf{F \leq 2S - 4}.$$

Les conditions de* (2) *sont suffisantes : c'est un peu plus difficile, car si

$$\mathbf{S \geq 4} \text{ et } \mathbf{\frac{1}{2}S + 2 \leq F \leq 2S - 4},$$

il faut exhiber un polyèdre de type (S,F).
* Si **S = 4,** alors 4 ≤ F ≤ 4 : le tétraèdre convient.
* Si **S = 5**, alors 5 ≤ F ≤ 6.
  Pour F = 5, la pyramide à base carrée convient.
  Pour F = 6, deux tétraèdres accolés (bipyramide) font l'affaire.

* Si **S ≥ 6**, on distingue deux cas : $\frac{1}{2}S + 2 \leq F \leq S$ ou S + 1 ≤ F ≤ 2 S – 4.

PREMIER CAS : $\mathbf{\frac{1}{2}S + 2 \leq F \leq S}$ (α)

– **ou bien S = 2*n*** et (α) équivaut à $n + 2 \leq F \leq 2n$.
Considérons le prisme (P) dont les bases sont deux polygones à n côtés (la figure 1 est possible puisque $S \geq 6 \Rightarrow n \geq 3$) . (P) a **2*n* sommets** et n + 2 faces ; or si on rapproche légèrement B de C le long de (BC), (BCB′C′) n'est que déformé, mais le quadrilatère (ABA′B′) devient gauche avec deux faces triangulaires (AA′B′) et (AB′B). Le résultat est qu'on a **autant de sommets** mais **une face de plus.** On peut faire ceci pour toutes les faces de (P) autres que les bases. Si on le fait k fois $[0 \leq k \leq n - 2]$, on aboutit à un polyèdre ayant $n + 2 + k$ faces, nombre compris **entre *n* + 2 et 2*n***. *De plus ce polyèdre possède deux faces quadrangulaires voisines.*

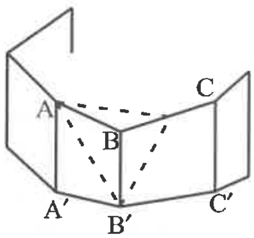


Figure 1

– **ou bien S = 2n + 1** et (α) équivaut à

$$n + 2 \leq F \leq 2n + 1.$$

On sait d'après le cas précédent obtenir un polyèdre (P) ayant $2n$ sommets et F–1 faces, dont deux faces voisines sont des quadrilatères (Figure 2). Si on « tronque » le sommet X de (P), on augmente le nombre de faces et le nombre de sommets de 1, ce qui nous amène pour les faces de $n + 2 \leq F - 1 \leq 2n$ à $\boldsymbol{n + 3 \leq F \leq 2n + 1}$ et pour les sommets de $2n$ à $\boldsymbol{2n + 1}$.

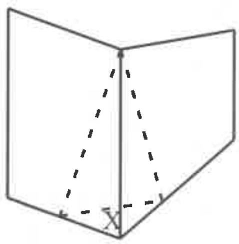


Figure 2

DEUXIÈME CAS : **S + 1 ≤ F ≤ 2S – 4.**
Partons de la pyramide (P) de base un polygone à 2S – F – 1 sommets [c'est possible puisque 2S – F – 1 ≥ 3]. (P) a 2S – F sommets et 2S – F faces dont au moins trois sont des triangles.
Considérons l'opération Ω consistant à accoler à une face triangulaire de (P) un tétraèdre (suffisamment aplati). Dans Ω, le nombre de sommets augmente de 1 et celui des triangles de 2.
Itérons F – S fois Ω [c'est possible puisque F – S ≥ 1]. On arrive à un polyèdre (P′) ayant (2S – F) + F – S = **S sommets** et (2S – F) + 2(F – S) = **F faces**. C Q F D.

2) On peut maintenant entrer dans le vif du sujet et poser la question
Q3 : Combien y a-t-il de polyèdres convexes distincts de type (S,F) ?
Précisons ce qu'on entend par polyèdres distincts. Disons qu'on ne s'intéresse qu'à la topologie (forme) des polyèdres : disposition des faces les unes par rapport aux autres, mais pas aux longueurs des arêtes, surfaces des faces…
On considère donc comme équivalents deux polyèdres qui diffèrent par :
– des rotations, translations, homothéties, symétries de $\mathbf{R}^3$.
– des déformations comme l'étirement d'une arête…
Dans cette optique **il n'existe par exemple qu'un seul tétraèdre.**
À partir de maintenant notons π**(S,F) le nombre de polyèdres convexes distincts de type (S,F).**

Indiquons dans un tableau quelques valeurs de π**(S,F)** :

Polyèdres convexes		Nombre de faces								
		4	5	6	7	8	9	10	11	12
Nombre de sommets	4	**1**	0	0	0	0	0	0	0	0
	5	0	**1**	**1**	0	0	0	0	0	0
	6	0	**1**	**2**	**2**	**2**	0	0	0	0
	7	0	0	**2**	**8**	**11**	**8**	**5**	0	0
	8	0	0	**2**	**11**	**42**	**74**	**?**	**?**	**?**
	9	0	0	0	**8**	**74**	**296**	**?**	**?**	**?**

On verra bientôt comment sont obtenues certaines de ces valeurs.

3) Que remarque t-on dans ce tableau ?

Bien entendu, les 0 correspondent aux couples (S,F) qui ne vérifient pas la condition (2) de STEINIZ. Ainsi :
si $S = 4$, alors (2) implique $4 \leq F \leq 4$, donc $F = 4$;
si $S = 5$, alors (2) implique $5 \leq F \leq 6$, etc .

Mais **d'où vient la symétrie du tableau** ? Elle vient d'une notion fondamentale : la **DUALITÉ**. Le dual d'un polyèdre convexe (P) de type (S,F) est un polyèdre convexe que je note (P~) de type (F,S). (P) a donc autant de sommets que (P~) a de faces et réciproquement, et, d'après la relation d'EULER, ils ont tous deux le même nombre d'arêtes : $A = S + F - 2$. De plus il existe une bijection involutive δ qui
– à chaque sommet X de (P) associe une face $\delta(X)$ de (P~),
– à chaque face π de (P) associe un sommet $\delta(\pi)$ de (P~),
et qui vérifie la propriété suivante :
Si $\pi = (X_1, X_2, X_3, \ldots, X_q)$ est une face quelconque de (P) alors le sommet $\delta(\pi)$ de (P~) est commun aux faces $\delta(X_1)$, $\delta(X_2)$, …, $\delta(X_q)$ de (P~) et seulement à ces faces-là.
Cette définition ainsi que l'existence du dual ne sont pas évidentes. Je me contenterai de donner deux méthodes de constructions effectives sur l'exemple de l'hexaèdre (P) ci-dessous. Les arêtes en trait gras doivent être vues en avant.

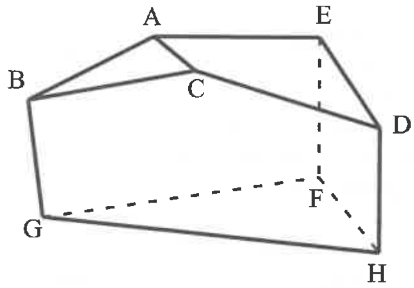


Figure 3

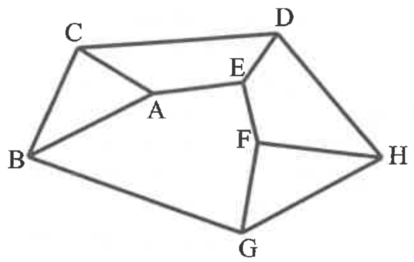


Figure 4

Construction du dual utilisant le graphe dual :
On supprime une face par exemple (BCDHG) et on aplatit comme vu dans la démonstration de la formule d'EULER au début. On obtient le polygone (P′) de la Figure 4.
Remarquez que les faces sont bien les mêmes sauf (BCDHG) qu'on a perdue mais qu'on peut considérer comme l'extérieur de la Figure 4.
Ensuite on choisit un point à l'intérieur de chaque polygone du pavage, y compris un point à l'extérieur pour (BCDHG). Ces points vont constituer les sommets du dual (P~).
Il ne reste plus qu'à joindre deux de ces points si et seulement si ce sont les points intérieurs à deux faces adjacentes de (P). Ce qui est réalisé par des pointillés sur la Figure 5.
Le dessin en pointillé est une vue de (P~) qu'on redessine proprement (Figure 6).

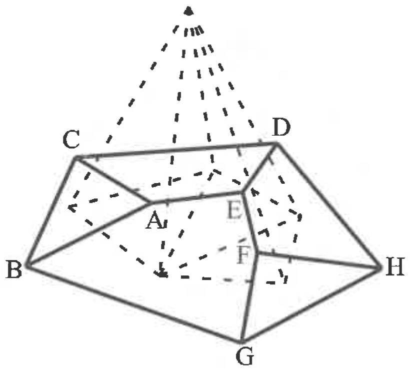


Figure 5

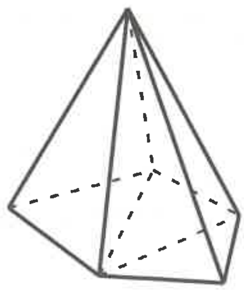


Figure 6

Construction du dual utilisant une représentation matricielle :

On commence par coder le polyèdre convexe (P) de type (S,F) par une matrice booléenne P de type (S,F) c'est-à-dire avec S lignes et F colonnes, avec la convention : $p_{i,j} = 1$ si et seulement si le sommet i appartient à la face j.

Pour notre exemple :

P =

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
A	1	1	1	0	0	0
B	1	1	0	1	0	0
C	1	0	1	1	0	0
D	0	0	1	1	1	0
E	0	1	1	0	1	0
F	0	1	0	0	1	1
G	0	1	0	1	0	1
H	0	0	0	1	1	1

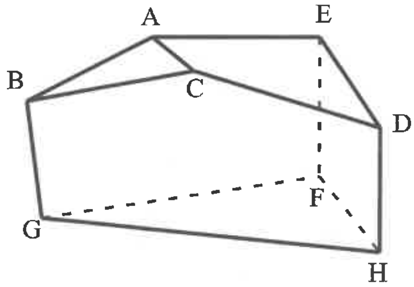
Dans ces conditions le dual (P~) a tout simplement pour matrice la transposée de P : P~

Pour effectuer la transposition, il suffit de permuter les lignes et les colonnes de la matrice P ainsi :

(P) a pour sommets {A,B,C,D,E,F,G,H} et pour faces a = {ABC}, b = {ABEFG}, c = {ACDE}, d = {BCDGH}, e = {DEFH}, f = {FGH}.

Donc, en tranposant, son dual (P~) a pour sommets {*a,b,c,d,e,f*} et pour faces A = {*abc*} B = {*abd*} C = {*acd*} D = {*cde*} E = {*bce*} F = {*bef*} G = {*bdf*} H = {*def*}.

Ce qui donne directement :



Polyèdre (P)

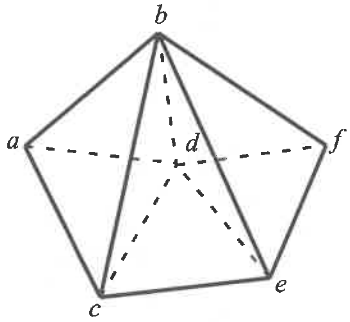


Figure 6

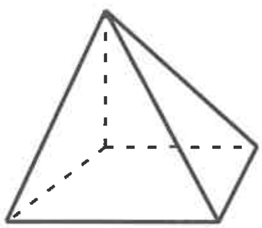
Ce dual peut être vu comme la réunion des 3 tétraèdres (abcd), (bcde) et (bdef).

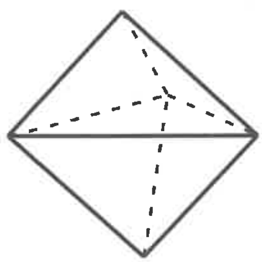
Il faut bien se persuader que **la matrice P détermine parfaitement le polyèdre (P).** Bien sûr pour dessiner (P) à partir de P, il y a un petit problème : pour chaque face on connaît les sommets mais pas l'ordre dans lequel ils se présentent. Mais il suffit de remarquer que (P) possède l'arête (X_i, X_j) si et seulement si dans les lignes i et j de P il existe deux colonnes k et l telles que $p_{i,k} = p_{i,l} = p_{j,k} = p_{j,l} = 1$. Alors l'arête (X_i, X_j) est l'intersection des faces k et l.
Par contre, comme on peut numéroter arbitrairement les sommets et les faces, un polyèdre (P) possède plusieurs matrices représentatives se déduisant les une des autres par permutations des lignes ou permutations des colonnes.

La dualité est importante car tout résultat concernant les polyèdres convexes a automatiquement un résultat dual. On échange S et F tout simplement. Voici quelques exemples :

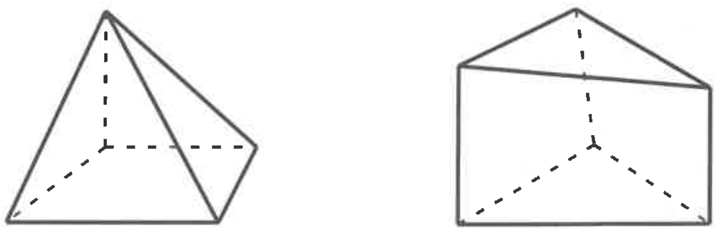
Exemple 1. **Le nombre de polyèdres à *n* faces est égal au nombre de polyèdres à *n* sommets.**

Ainsi : Il y a deux polyèdres convexes à 5 sommets : (la 4-pyramide et la 3-bipyramide).





DONC Il y a deux polyèdres convexes à 5 faces : (la 4-pyramide auto-duale et le 3-prisme).



Exemple 2. La condition de STEINIZ a deux formes duales équivalentes :

$$\mathbf{S \geq 4 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}S + 2 \leq F \leq 2S - 4}$$

ou

$$\mathbf{F \geq 4 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}F + 2 \leq S \leq 2F - 4}$$

Exemple 3. Si on note s_p le nombre de sommets d'ordre p (appartenant à p faces) et f_p le nombre de faces d'ordre p (ayant p sommets), on a les deux relations duales :

$$s_4 + 2\,s_5 + 3\,s_6 + 4\,s_7 + \ldots = 2\,\mathrm{F} - \mathrm{S} - 4,$$

$$f_4 + 2\,f_5 + 3\,f_6 + 4\,f_7 + \ldots = 2\,\mathrm{S} - \mathrm{F} - 4,$$

et aussi

$$3\,s_3 + 2\,s_4 + s_5 \geq 12,$$
$$3\,f_3 + 2\,f_4 + f_5 \geq 12,$$

qui sont autant d'exercices amusants.

4) Passons aux dénombrements proprement dits.

En utilisant tout ce qui précède, montrons par exemple qu'il y a sept polyèdres convexes à 6 faces :

– D'abord il est évident que : **si $i \geq 6$ alors $f_i = 0$.**

– F = 6 , la condition de STEINIZ implique $\mathbf{5 \leq S \leq 8}$ et la relation

$$f_4 + 2\,f_5 + 3\,f_6 + 4\,f_7 + \ldots = 2\,\mathrm{S} - \mathrm{F} - 4$$

devient

$$\boldsymbol{f_4 + 2\,f_5 = 2\,\mathrm{S} - 10,}$$

d'où l'algorithme :

Pour S variant de 5 à 8 on résout l'équation diophantienne $f_4 + 2\,f_5 = 2\,\mathrm{S} - 10$ et pour chaque solution (f_4,f_5) on tire $f_3 = \mathrm{F} - f_4 - f_5 = 6 - f_4 - f_5$.

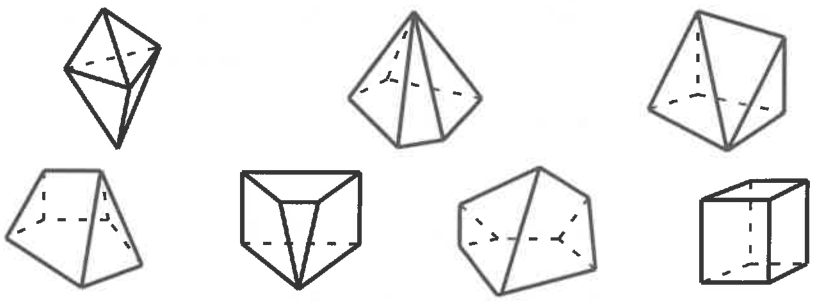
On connait donc le nombre de faces de chaque ordre et on essaie de les placer de toutes les façons possibles à partir de l'une d'elles choisie comme base (on peut s'aider de la relation duale, ici : $s_4 + 2\,s_5 = 8 - \mathrm{S}$).

fin.

Cela donne :

pour S = 5, une solution : $f_3 = 6, f_4 = 0, f_5 = 0$;
pour S = 6, deux solutions : $f_3 = 5, f_4 = 0, f_5 = 1$ et $f_3 = 4, f_4 = 2, f_5 = 0$;
pour S = 7, deux solutions : $f_3 = 3, f_4 = 2, f_5 = 1$ et $f_3 = 2, f_4 = 4, f_5 = 0$;
pour S = 8, deux solutions : $f_3 = 2, f_4 = 2, f_5 = 2$ et $f_3 = 0, f_4 = 6, f_5 = 0$.

Voici les sept hexaèdres dans l'ordre précédent :



5) Combien y a t-il de polyèdres convexes à *n* arêtes ?

Si le nombre d'arêtes n est donné, alors S + F = n + 2 est constant, donc pour avoir le nombre de polyèdres convexes à n arêtes, il suffit dans le tableau donnant le nombre π(S,F) de polyèdres convexes de type (S,F) de faire la somme des π(S,F) pour $S + F = n + 2$, $S \geq 4$, $F \geq 4$.

On obtient :

nombre d'arêtes	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
nombre de polyèdres	**1**	**0**	**1**	**2**	**2**	**4**	**12**	**22**	**58**

Il s'agit de la suite M0339 de l'encyclopédie intitulée « polyedral graphs with n edges ».

J'ai obtenu les dessins des **34 heptaèdres convexes** (en fin d'article) en utilisant leur représentation aplatie comme vue précédemment, et en me ramenant donc à la recherche de tous les pavages polygonaux en six polygones. Ce qui ne va pas tout seul car deux pavages distincts peuvent être ceux d'un même polyèdre qu'on a aplati de deux façons en ne supprimant pas la même face.

Le codage par matrice booléenne est évidemment plus adapté au calcul (informatique) mais encore faudrait-il caractériser les matrices qui représentent des polyèdres convexes qui existent !

Ces 34 heptaèdres sont classés selon leur nombre de sommets (voir la colonne F = 7 du tableau π(S,F)) :

1 à 2, ceux qui ont 6 sommets,
3 à 10 ceux qui ont 7 sommets,
11 à 21, ceux qui ont 8 sommets,
22 à 29, ceux qui ont 9 sommets,
30 à 34, ceux qui ont 10 sommets.

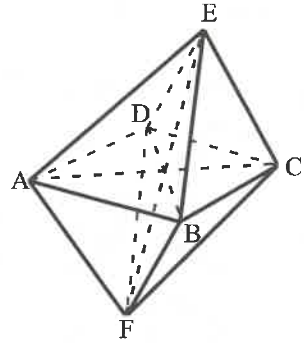
6) Le sujet est loin d'être épuisé.

Le fait que tout polyèdre convexe est la juxtaposition d'un nombre fini de tétraèdres est une piste intéressante.

Lorsqu'on « tronque » un sommet d'un polyèdre convexe, on obtient un polyèdre convexe de type voisin. C'est une autre piste.

Et je me suis limité aux convexes ! Pour les autres, la relation d'EULER n'est même pas garantie. Par exemple, il n'est pas évident même avec le dessin de se représenter l'heptaèdre croisé ci-contre (certaines faces se coupent selon des segments qui ne sont pas des arêtes) de matrice

1 1 0 1 0 1 0
1 0 1 0 1 1 0
1 1 0 0 1 0 1
1 0 1 1 0 0 1
0 1 1 1 1 0 0
0 1 1 0 0 1 1

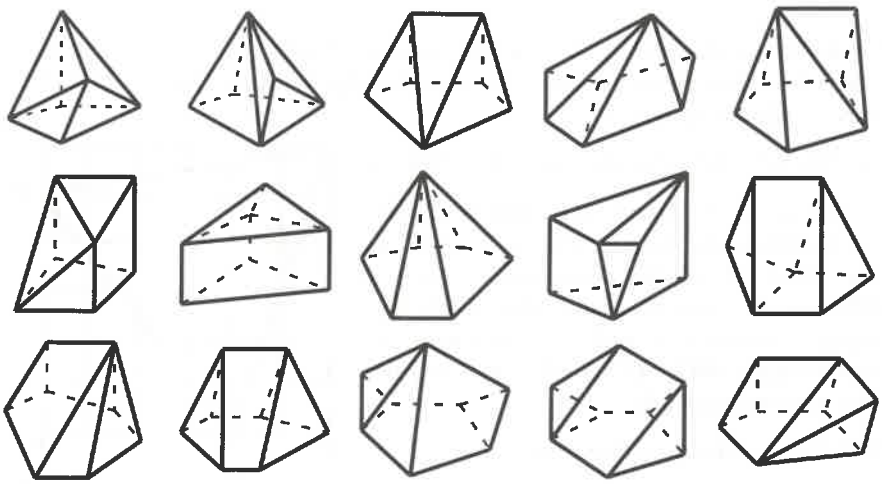


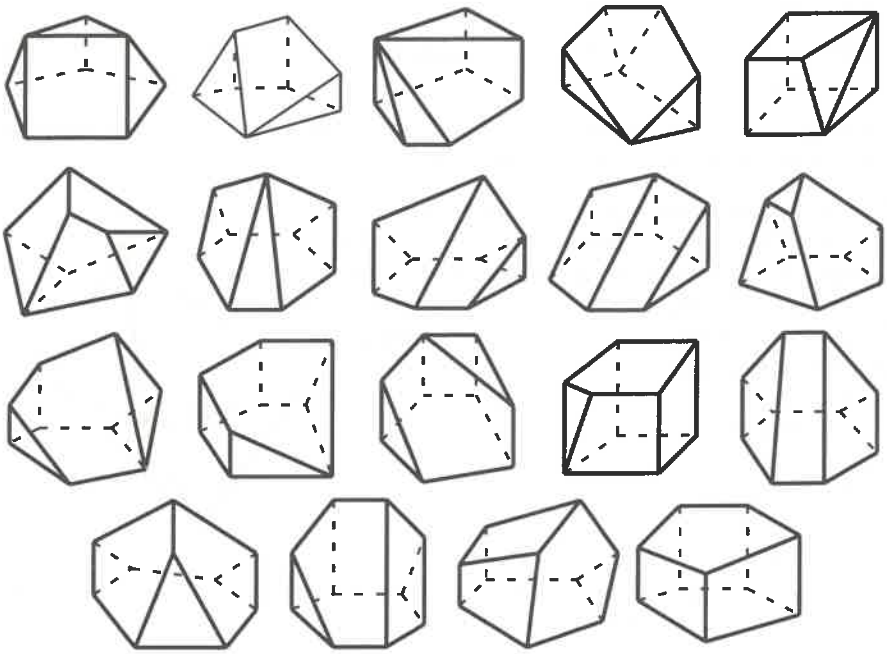
Ce polyèdre n'a que 7 faces : les trois quadrilatères ABCD, ACEF et BDEF et les quatre triangles ADE, BCE, ABF et CDF.

Bibliographie :

H.M. CUNDY et A.P. ROLLETT. *Modèles mathématiques*. CEDIC.
N.J.A. SLOANE S. PLOUFFE. *The encyclopedia of integer sequences*. Academic Press.
A. HOLDEN. *Formes espace et symétries*. CEDIC (Les Distracts).

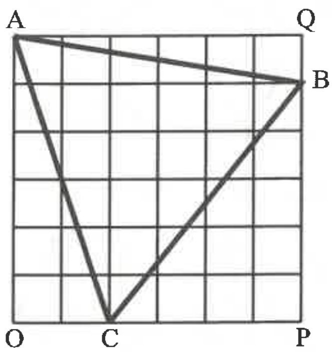
Les 34 heptaèdres convexes





SOLUTION DU PROBLÈME DE LA PAGE 29

Supposons qu'il existe un triangle ABC équilatéral dont les sommets sont sur les nœuds d'un quadrillage carré et appelons a la longueur de son côté (l'unité choisie étant le côté des carrés).



On démontre sans peine que l'aire du triangle est égale à $a^2\sqrt{3}/4$ qui est un nombre irrationnel car, d'après le théorème de Pythagore, a^2 est un entier. Mais, en calculant cette même aire comme différence de l'aire du quadrilatère AOPQ dans lequel est inscrit le triangle et de la somme des trois triangles ABQ, ACO et BPC, on trouve que cette aire est rationnelle.

Un tel triangle n'existe donc pas.