

# Approximation des nombres réels par des rationnels

Mathieu Savin

## Position du problème

La découverte de nombres irrationnels a profondément troublé les mathématiciens grecs. En effet, ils étaient habitués à des énoncés de théorèmes qui avaient un support graphique clair : la géométrie euclidienne fournit des énoncés qui pourraient être considérés comme des assertions décrivant le monde réel. Les théorèmes de la géométrie euclidienne sont tous vérifiables à la règle et au compas ; ils ne sont certes pas démontrables sans utiliser des outils mathématiques comme des axiomes et des règles de logique, mais on peut en vérifier la pertinence et l'exactitude. Même l'arithmétique a un support palpable : les énoncés des problèmes et exercices classiques se placent souvent dans un cadre assez rural (des moutons, des épis de blé, de sombres histoires d'héritage à partager...).

Mais l'irrationalité de certains nombres, c'est-à-dire l'impossibilité de les exprimer comme des quotients de nombres entiers, n'a absolument aucun support dans le monde réel. Il est impossible de mesurer une longueur et d'affirmer aussitôt que cette longueur est incommensurable avec l'unité : aucune règle, si perfectionnée soit-elle, ne pourra jamais permettre à elle seule de vérifier ce théorème. Non seulement il faut rentrer dans le domaine des mathématiques pures pour prouver que  $\sqrt{2}$  est irrationnel, mais il est impossible d'en sortir pour le vérifier.

Le problème avec ces nombres irrationnels est qu'il n'existe pas de manière simple d'effectuer avec eux des opérations qui sont usuelles et faciles avec des rationnels. Il est par exemple difficile de décrire le nombre  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  : on peut, bien sûr, construire géométriquement cette longueur à l'aide de triangles rectangles, mais il n'est pas facile d'expliquer que ce nombre comporte une réalité mathématique que le dessin ne permet pas d'appréhender. Quant à des nombres tels que  $e$ ,  $\pi$ , ou  $\ln 2$ , on ne peut pas les dessiner, bien qu'ils aient une existence. Les nombres irrationnels sont souvent définis par des propriétés qui, si elles permettent certains calculs, compliquent tous les autres. Il est donc naturel d'essayer de remplacer dans les calculs ces nombres irrationnels par des fractions de nombres entiers, qui rendent les calculs plus faciles. Le problème qui se pose alors est celui de l'approximation de ces nombres. On a ainsi longtemps utilisé en pratique l'approximation  $\pi \approx 22/7$  pour trouver une valeur approchée de l'aire d'un disque.

Notre objectif sera de présenter des résultats généraux sur l'approximation des réels par des nombres rationnels. Un des résultats les plus surprenants que fournit

cette théorie est le suivant : plus il est facile de trouver une approximation correcte d'un nombre réel, plus celui-ci est compliqué. Nous donnerons bien sûr un sens précis à cette expression au cours de ces quelques pages. Pour l'essentiel, l'esprit de cet article est bien d'étudier les réels et d'essayer de voir quelles sont les caractéristiques de ces nombres qui permettent une approximation plus efficace par des rationnels. Nous laisserons de côté des questions plus complexes, comme celle de l'influence de l'approximation sur les calculs, autrement dit de l'évaluation de l'erreur commise lorsqu'on remplace dans un calcul le nombre par son approximation. Dans la mesure où il faudrait développer l'artillerie lourde des fractions continues, qui fournissent la solution du problème, nous n'aborderons pas les méthodes permettant d'obtenir les meilleures approximations. Nous nous cantonnerons à l'aspect théorique de cette question.

Dans toute la suite,  $\xi$  désignera un nombre réel fixé.

### Quelques résultats faciles

**Théorème 1.** *Tout nombre réel est limite d'une suite de nombre rationnels.*

On ne peut pas démontrer rigoureusement ce théorème à un niveau élémentaire. En effet, si on essaye de le prouver, il faut définir précisément un nombre réel : il faut avoir un moyen de décrire les éléments de  $\mathbf{R}$  et pour cela il faut savoir comment cet ensemble est construit. Or justement cette construction n'est pas élémentaire : c'est ce qui rend le théorème difficile. On peut en tout cas presque voir ce théorème comme une définition des nombres réels : on n'est pas très loin de la réalité.

Mais si la preuve rigoureuse de ce théorème n'est pas élémentaire, il est en tout cas facile d'en donner une preuve en utilisant une définition intuitive des nombres réels. Un réel a une écriture décimale, qui n'est peut-être pas unique<sup>(1)</sup>, mais ce n'est pas important. Si on considère le nombre qu'on obtient en prenant les  $n$  premières décimales de  $\xi$ , c'est un nombre qui s'écrit sous la forme  $\frac{p}{10^n}$ , où  $p$  est entier ; la différence entre  $\xi$  et ce nombre rationnel est inférieure à  $10^{-n}$  : et ainsi ce rationnel est une approximation de  $\xi$  à la précision  $10^{-n}$ . Comme  $n$  est arbitraire, on obtient ainsi une approximation aussi bonne qu'on veut. Il existe ainsi une infinité de solutions  $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$  de l'inéquation

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q} ;$$

nous n'avons pas démontré ce résultat pour tous les dénominateurs  $q$  possibles, mais seulement pour ceux qui sont de la forme  $10^n$ . Nous n'avons pas non plus démontré que les fractions  $p/q$  représentent toutes des rationnels distincts : ce serait d'ailleurs faux si  $\xi$  était un nombre décimal.

(1) En effet, on peut écrire  $1 = 0,999\dots$ . Ceci se démontre simplement : si on pose  $x = 0,999\dots$ , alors  $10x = 9,99\dots$ , et ainsi  $10x = 9 + x$  ; on en déduit  $9x = 9$ , puis  $x = 1$ .

Mais on peut améliorer ce résultat :

**Théorème 2.** Si  $q \in \mathbf{N}^*$ , il existe  $p \in \mathbf{Z}$  tel que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2q}.$$

Notons ici qu'on améliore le résultat de deux points de vue : premièrement, on a une majoration avec un dénominateur arbitraire ; et ensuite, nous remplaçons  $1/q$  par  $1/2q$ , en diminuant ainsi de moitié l'erreur commise dans l'approximation.

*Preuve.* Considérons l'ensemble  $\frac{1}{q} \mathbf{Z}$  de tous les nombres rationnels qui peuvent s'écrire sous la forme  $k/q$ , où  $k$  est entier. Ces nombres définissent des intervalles semi-ouverts de la forme  $\left[ \frac{k}{q}, \frac{k+1}{q} \right[$  ; chacun de ces intervalles est de longueur  $\frac{1}{q}$ , ils sont disjoints et leur réunion est  $\mathbf{R}$  tout entier.

Ainsi  $\xi$  se trouve nécessairement dans un de ces intervalles  $\left[ \frac{k}{q}, \frac{k+1}{q} \right[$  ; mais alors :

- si  $\xi \in \left[ \frac{k}{q}, \frac{k}{q} + \frac{1}{2q} \right[$ , on prend  $p = k$  et alors  $\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{2q}$  ;
- si  $\xi \in \left[ \frac{k}{q} + \frac{1}{2q}, \frac{k+1}{q} \right[$ , on prend  $p = k + 1$  et on obtient encore la même inégalité.

Ce théorème est déjà très utile dans la pratique. On peut l'appliquer de deux façons : soit on se donne une valeur du dénominateur à ne pas dépasser, et cela détermine la marge d'erreur que nous obtiendrons ; soit on se donne une marge d'erreur à l'avance, et cela détermine alors une taille minimum du dénominateur qu'il nous faudra utiliser pour notre approximation. Remarquons aussi que rien ne garantit ici que les fractions obtenues sont écrites sous forme irréductible.

En tout cas, nous allons nous orienter dans les directions suivantes :

- Nous essaierons de trouver une infinité d'approximations *distinctes* : c'est-à-dire que nous chercherons des rationnels distincts qui s'approchent de  $\xi$ .
- Nous ne chercherons pas à avoir des approximations avec un dénominateur imposé, pour deux raisons : il est difficile de contrôler qu'on obtient une infinité d'approximations, et les meilleures approximations ne peuvent pas se faire en imposant le dénominateur. Par exemple, il est hérétique d'approximer  $\pi$  avec un dénominateur égal à 10, puisque  $31/10$  est une approximation moins bonne que  $22/7$ .
- Nous chercherons à majorer l'erreur de l'approximation en fonction du dénominateur du rationnel ; les fonctions les plus simples étant les fonctions puissances, nous chercherons à majorer l'erreur par l'inverse de puissances du dénominateur.

**Définition.** Fixons un entier  $\alpha \geq 1$  ; on dira qu'un réel  $\xi$  est **approximable à l'ordre  $\alpha$**  s'il existe une constante  $A > 0$  pour laquelle l'inégalité

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{A}{q^\alpha}$$

est vérifiée pour une infinité de rationnels  $p/q$ .

Nous verrons assez vite que ce problème n'admet pas toujours des solutions, et que le rôle de  $\alpha$  est essentiel. Notons aussi que le nombre  $A$  peut dépendre de  $\xi$ , et que, si  $\xi$  est approximable à l'ordre  $\alpha$ , il est approximable à n'importe quel ordre inférieur à  $\alpha$ .

### Un exemple : approximation de $\sqrt{2}$

Nous allons définir une suite de rationnels qui convergera vers  $\sqrt{2}$ , et dont nous contrôlerons facilement l'écart avec sa limite ; nous nous efforcerons ensuite d'exprimer cet écart en fonction du dénominateur des fractions, et nous démontrerons ainsi que  $\sqrt{2}$  est approximable à l'ordre 2.

Considérons la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par<sup>(2)</sup> :  $u_0 = 1$ , et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}.$$

On trouve, comme valeurs approchées à  $10^{-12}$  près :

$$\begin{aligned} u_1 &= 1,5 \\ u_2 &= 1,416\ 666\ 666\ 667 \\ u_3 &= 1,414\ 215\ 686\ 275 \\ u_4 &= 1,414\ 213\ 562\ 375 \end{aligned}$$

et on voit que cette suite approche très vite de  $\sqrt{2}$ .

Il est facile de vérifier par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est un rationnel qui vérifie l'inégalité  $1 \leq u_n \leq 2$ . De plus, si on écrit  $u_n = p_n/q_n$ , alors les suites  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  peuvent être définies par récurrence en posant  $p_0 = q_0 = 1$ , et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} p_{n+1} = p_n^2 + 2q_n^2, \\ q_{n+1} = 2p_nq_n. \end{cases}$$

On ne se complique pas la tâche ici de savoir si l'écriture  $p_n/q_n$  donnée par cette formule est irréductible ou pas ; ce n'est pas important. Signalons simplement que

(2) Cette suite ne sort pas magiquement d'un chapeau : elle est un cas particulier de la méthode de Newton, appliquée à la fonction  $f(x) = x^2 - 2$  au voisinage de  $\sqrt{2}$ . Quand la méthode

s'applique, la suite définie par  $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$  converge vers le point  $c$  tel que  $f(c) = 0$ .

cette formule montre, par récurrence, que  $q_n > 0$  et  $p_n > 0$ .

Remarquons que  $p_{n+1}$  ressemble à une somme de carrés, et que  $q_{n+1}$  ressemble à un double produit ; en tâtonnant un peu, on trouve :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad p_{n+1} - \sqrt{2} q_{n+1} = (p_n - \sqrt{2} q_n)^2$$

et ainsi, par une récurrence facile, on obtient

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad p_n - \sqrt{2} q_n = (p_0 - \sqrt{2} q_0)^{2^n} = (1 - \sqrt{2})^{2^n}.$$

On en déduit que, comme  $2^n$  est pair dès que  $n \geq 1$ ,

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^{2^n} \frac{1}{q_n}.$$

On obtient ainsi une approximation de  $\sqrt{2}$  à l'ordre 1, mais le coefficient devant  $1/q_n$  tend vers 0 très rapidement : on doit pouvoir mieux faire. Signalons en tout cas que, comme  $q_n \geq 1$ , on peut majorer  $|u_n - \sqrt{2}|$  par une suite qui converge très rapidement vers 0, ce qui prouve que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{2}$ .

De façon plus précise, l'égalité obtenue prouve que  $u_n - \sqrt{2}$  est un nombre strictement positif dès que  $n \geq 1$  ; et ainsi  $u_n > \sqrt{2}$ , pour tout  $n \geq 1$ . Mais aussi

$$\forall n \geq 1 \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n} - \frac{u_n}{2} = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} < 0,$$

et ainsi la suite  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est strictement décroissante à partir de  $u_1$  : on en déduit que tous les termes de cette suite sont distincts, puisque de plus  $u_0 < \sqrt{2} < u_n$  si  $n \geq 1$ .

Pour améliorer les résultats obtenus, remarquons d'abord qu'on a utilisé ci-dessus une identité remarquable, celle qui fournit  $(a - b)^2$  ; si on utilise l'autre identité pour  $(a + b)^2$ , on trouve :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad p_{n+1} + \sqrt{2} q_{n+1} = (p_n + \sqrt{2} q_n)^2$$

et ainsi

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad p_n + \sqrt{2} q_n = (p_0 + \sqrt{2} q_0)^{2^n} = (1 + \sqrt{2})^{2^n}.$$

L'inégalité que vérifie  $u_n$  montre que  $q_n \leq p_n$ , et ainsi

$$(1 + \sqrt{2}) q_n \leq p_n + \sqrt{2} q_n$$

et donc

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} \frac{1}{q_n} \geq \frac{1}{(1+\sqrt{2})^{2^n}}.$$

Or  $\sqrt{2}-1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ , et on peut écrire

$$\left| \frac{p_n}{q_n} - \sqrt{2} \right| = (\sqrt{2}-1)^{2^n} \frac{1}{q_n} = \frac{1}{(\sqrt{2}+1)^{2^n}} \frac{1}{q_n} \leq \frac{1}{1+\sqrt{2}} \frac{1}{q_n^2} = \frac{\sqrt{2}-1}{q_n^2}.$$

Comme ceci est vrai pour tout  $n$  et que tous les rationnels  $u_n = p_n/q_n$  sont distincts, on en déduit que  $\sqrt{2}$  est approximable à l'ordre 2 (le nombre  $A$  de la définition vaut ici  $\sqrt{2}-1$ ), et que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  donne une infinité d'approximations à l'ordre 2. Nous avons remarqué que la convergence de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $\sqrt{2}$  est très rapide, et cela ne se voit pas dans cette inégalité : tout ce que cette dernière majoration montre, c'est que  $\sqrt{2}$  est approximable à l'ordre 2.

Au passage, les deux égalités obtenues pour  $p_n + \sqrt{2} q_n$  et  $p_n - \sqrt{2} q_n$  permettent de calculer explicitement  $p_n$  et  $q_n$ , en résolvant un système de deux équations à deux inconnues ; on trouve :

$$\begin{cases} p_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{2^n} + (1-\sqrt{2})^{2^n}}{2}, \\ q_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{2^n} - (1-\sqrt{2})^{2^n}}{2\sqrt{2}}. \end{cases}$$

C'est un exercice d'application de la formule du binôme que de vérifier sur ces formules que  $p_n$  et  $q_n$  sont entiers, et d'en donner une expression à l'aide de sommes de coefficients binomiaux.

### Approximations d'ordre 1 et d'ordre 2

Nous allons caractériser maintenant les nombres réels qui sont approximables à l'ordre 1, et ceux qui sont approximables à l'ordre 2.

**Lemme 3.** Soit  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite bornée de rationnels ; écrivons  $r_n = p_n/q_n$ , avec  $q_n > 0$ . Si tous les  $r_n$  sont distincts, alors la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas majorée.

Ce lemme peut être admis : il est intuitivement évident, puisqu'il semble difficile d'obtenir une infinité de fractions dans un intervalle donné avec un dénominateur borné.

*Preuve.* Procédons par contraposée ; si la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée, elle admet un plus grand élément  $N$  ; tous les rationnels  $r_n$  s'écrivent alors avec un dénominateur

inférieur à  $N$ . Posons  $r_n = \frac{P'_n}{N!}$  ; les  $P'_n$  sont entiers, puisque  $N!$  est forcément multiple de  $q_n$ .

La suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant bornée, on en déduit que la suite d'entiers  $(P'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée aussi, car  $P'_n = ar_n$ , où  $a = N!$  est une constante. Elle ne peut donc pas prendre une infinité de valeurs distinctes, puisque tout sous-ensemble borné de  $\mathbb{Z}$  est fini. On en déduit que les  $P'_n$  ne sont pas tous distincts, c'est-à-dire que les  $r_n$  ne sont pas tous distincts.

**Proposition 4.** *En particulier, si un réel est approximable à un certain ordre  $\alpha$ , l'ensemble des dénominateurs  $q > 0$  des rationnels  $p/q$  tels que*

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{A}{q^\alpha}$$

*est non majoré.*

Cette proposition peut elle aussi être admise. Elle nous servira dans des démonstrations par l'absurde : pour montrer que certains nombres  $\xi$  ne sont pas approximables à un certain ordre  $\alpha$ , on supposera qu'ils le sont, et on montrera alors que l'ensemble des dénominateurs des approximations est majoré : on en déduira que l'hypothèse initiale, c'est-à-dire que  $\xi$  est approximable à l'ordre  $\alpha$ , est absurde.

*Preuve.* On peut construire une suite  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'approximations distinctes de  $\xi$ , où  $r_n = p_n/q_n$ , telles que

$$\left| \frac{p_n}{q_n} \right| \leq |\xi| + \left| \frac{p}{q} - \xi \right| \leq |\xi| + \frac{A}{q_n^\alpha} \leq |\xi| + A ;$$

la suite  $r_n$  étant bornée et formée de rationnels distincts, on en déduit, d'après le lemme 3, que les dénominateurs  $q_n$  ne sont pas majorés.

Le résultat suivant démontre, si on en avait besoin, qu'il n'est pas très raisonnable de chercher à approximer un rationnel : non seulement cela semble ridicule, mais en plus les approximations sont forcément les moins efficaces possibles.

**Théorème 5.** *Si  $\xi$  est un rationnel, alors  $\xi$  est approximable à l'ordre 1 et à aucun ordre supérieur.*

*Preuve.* Écrivons  $\xi = a/b$  sous forme irréductible. Comme  $a$  et  $b$  sont premiers entre eux, le théorème de Bezout affirme que l'équation  $aq - bp = 1$  admet un couple de solutions  $(q_0, p_0)$ . Mais alors, si  $k$  est entier, le couple  $(q_0 + kb, p_0 + ka)$  est aussi solution de cette équation. Nous avons ainsi une infinité de quotients  $p/q$  tels que :

$$\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{1}{bq}$$

Ces quotients sont en fait écrits sous forme irréductible, mais nous allons prouver

uniquement qu'ils sont tous distincts : en effet, si  $p/q$  et  $p'/q'$  vérifient l'égalité plus

haut et si  $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ , alors

$$\frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{1}{bq} = \frac{1}{bq'} = \frac{a}{b} - \frac{p'}{q'},$$

et ainsi  $q = q'$ , et on en déduit  $p = p'$ . Il existe ainsi une infinité de rationnels  $p/q$  tels que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{bq},$$

et ainsi  $\xi$  est approximable à l'ordre 1.

Il nous reste à voir que  $\xi$  n'est pas approximable à un ordre supérieur à 1 ; pour cela, il suffit de montrer qu'il n'est pas approximable à l'ordre 2. Cela se fait par l'absurde : si on peut approximer  $\xi = a/b$  à l'ordre 2, il existe une constante  $A$  telle que l'inégalité

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{A}{q^2}$$

admette une infinité de solutions. Mais si  $p/q \neq \xi$ , on peut calculer :

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{a}{b} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|aq - bp|}{bq} \geq \frac{1}{bq},$$

puisque le numérateur est un nombre entier qui n'est pas nul ; et ainsi nous avons  $bq \geq q^2/A$ , soit  $q \leq bA$ . L'ensemble des dénominateurs des approximations de  $\xi$  est majoré : il y a une contradiction, au vu de la proposition précédente. Ainsi  $\xi$  n'est pas approximable à l'ordre 2, ni à aucun ordre supérieur.

**Corollaire 6.**  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

*Preuve.* C'est une des démonstrations les plus compliquées de ce fait que je connaisse ; nous avons montré plus haut que  $\sqrt{2}$  est approximable à l'ordre 2 : ceci entraîne que  $\sqrt{2}$  n'est pas rationnel.

Pour démontrer que certains réels sont approximables à l'ordre 2, nous allons d'abord prouver qu'il existe des approximations d'ordre 2 pour tout réel, puis que, dans certains cas, il y a une infinité de telles approximations.

**Lemme 7.** Si  $N \in \mathbb{N}^*$ , il existe une fraction  $p/q$  telle que

$$1 \leq q \leq N \quad \text{et} \quad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qN}.$$

En particulier, cette fraction  $p/q$  vérifie

$$1 \leq q \leq N \quad \text{et} \quad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

*Preuve.* La démonstration de ce résultat repose sur une utilisation judicieuse du principe des tiroirs.

Si  $x$  est un réel, notons  $E(x)$  sa partie entière, et  $(x)$  sa partie fractionnaire :  $(x) = x - E(x)$ . Soit  $N$  un entier naturel. Considérons les  $N + 1$  réels  $0, (\xi), (2\xi), \dots, (N\xi)$ . Ces points sont tous contenus dans les  $N$  intervalles

$$\left[ 0, \frac{1}{N} \right], \left[ \frac{1}{N}, \frac{2}{N} \right], \dots, \left[ \frac{N-1}{N}, 1 \right].$$

D'après le principe des tiroirs, l'un au moins des intervalles contient deux points et ainsi il existe deux entiers  $q_1$  et  $q_2$  tels que

$$1 \leq q_1 < q_2 \leq N \quad \text{et} \quad |(q_2\xi) - (q_1\xi)| < \frac{1}{N}.$$

Mais ceci s'écrit encore :

$$|q\xi - p| < \frac{1}{N},$$

où  $q = q_2 - q_1$  et  $p = E(q_2\xi) - E(q_1\xi) \in \mathbf{Z}$ . Remarquons que  $1 \leq q \leq N$  ; on en déduit qu'il existe une fraction  $p/q$  telle que

$$1 \leq q \leq N \quad \text{et} \quad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qN} \leq \frac{1}{q^2}.$$

Ainsi tout réel admet une approximation d'ordre 2 ; seulement, quand  $\xi$  est rationnel, il n'y a qu'un nombre fini de telles approximations. Voici la réciproque de ce résultat.

**Théorème 8.** *Si  $\xi$  est un réel irrationnel, alors  $\xi$  est approximable à l'ordre 2.*

Les nombres les plus intéressants à approximer sont les irrationnels ; on pouvait s'en douter !

*Preuve.* Il reste à voir que, quand  $\xi$  est irrationnel, il y a une infinité de solutions de l'inéquation

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2}.$$

Supposons qu'il n'y en ait qu'un nombre fini :

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \dots, \frac{p_k}{q_k}.$$

Comme  $\xi$  est irrationnel, aucun de ces nombres n'est égal à  $\xi$  ; en particulier,

$$\min_{1 \leq i \leq k} \left| \xi - \frac{p_i}{q_i} \right| > 0.$$

Ainsi il existe un entier  $N > 0$  tel que

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \quad \left| \xi - \frac{p_i}{q_i} \right| > \frac{1}{N};$$

mais alors la fraction  $p/q$  donnée par le lemme plus haut pour cette valeur de  $N$  vérifie

$$1 \leq q \leq N \quad \text{et} \quad \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q^2},$$

de même que

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{qN} \leq \frac{1}{N},$$

ce qui prouve que  $p/q$ , tout en fournissant une approximation d'ordre 2 de  $\xi$ , n'est pas dans la liste des fractions  $p_i/q_i$  : on a ainsi trouvé une contradiction.

### Approximations d'ordre supérieur

Dans cette section, nous allons exhiber des ensembles de réels qui ne sont pas approximables à l'ordre  $n$ , où  $n$  est fixé à l'avance. Quand  $n = 1$ , nous avons la réponse : les seuls réels qui ne sont pas approximables à l'ordre 2 sont les nombres rationnels.

Les nombres rationnels sont les solutions des équations polynomiales de degré 1, à coefficients entiers : ainsi  $p/q$  est la solution de l'équation

$$qx - p = 0.$$

La clé pour exhiber des nombres qui ne sont pas approximables à l'ordre  $n$  est justement cette notion de solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers.

**Définition.** On dit que  $\xi$  est un *nombre algébrique* si  $\xi$  est solution d'une équation polynomiale à coefficients entiers. Parmi tous les polynômes dont  $\xi$  est racine, il y en a qui ont un degré minimum : on appelle ce degré le *degré* de  $\xi$ . Si  $\xi$  n'est pas algébrique, on dit que  $\xi$  est *transcendant*.

Si  $\xi$  est algébrique, il y a une infinité de polynômes dont  $\xi$  est racine ; ainsi, par exemple,  $\sqrt{2}$  est racine de  $x^2 - 2$ , mais aussi de  $x^4 - 4$ , de  $x^6 - 8$ , de  $3x^2 - 6$  ; mais chacun de ces polynômes est au moins de degré 2, et ainsi  $\sqrt{2}$  est un nombre algébrique de degré 2. De la même façon,  $\sqrt[n]{2}$  est un réel algébrique de degré  $n$ .

**Théorème 9.** Si  $\xi$  est un réel algébrique de degré  $n$ , alors  $\xi$  n'est pas approximable à un degré supérieur à  $n$ .

*Preuve.* La démonstration est relativement simple. Soit

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

un polynôme de degré minimal à coefficients entiers dont  $\xi$  est racine.

Supposons que  $\xi$  soit approximable à l'ordre  $n + 1$ . Il existe alors un nombre réel  $A$  tel que l'inéquation

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{A}{q^{n+1}}$$

admette une infinité de solutions distinctes. Parmi celles-là, écartons éventuellement les autres racines de  $f$  (on en enlève un nombre fini), et écartons aussi les fractions qui se trouvent à une distance supérieure à 1 de  $\xi$  : on garde une infinité de fractions,

puisqu'on garde celles dont le dénominateur est supérieur à  ${}^{n+1}\sqrt{A}$ .

On peut écrire, après réduction au même dénominateur,

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \frac{|a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n|}{q^n} \geq \frac{1}{q^n},$$

puisque le numérateur est un nombre entier qui ne peut pas être nul (sans quoi  $p/q$  serait racine de  $f$ , ce qu'on a exclu).

Soit  $M$  un majorant de  $f'(x)$  dans l'intervalle  $[\xi - 1, \xi + 1]$ . L'inégalité des accroissements finis fournit alors :

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = \left| f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\xi) \right| \leq M \left| \frac{p}{q} - \xi \right|,$$

d'où encore

$$\left| \frac{p}{q} - \xi \right| \geq \frac{1}{M} \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \geq \frac{1}{M} \frac{1}{q^n}.$$

On obtient ici une inégalité :

$$\frac{1}{M} \frac{1}{q^n} \leq \frac{A}{q^{n+1}},$$

c'est-à-dire  $q \leq AM$  ; ainsi l'ensemble des dénominateurs des approximations de  $\xi$  est borné, ce qui est une contradiction : on en déduit que  $\xi$  n'est pas approximable à l'ordre  $n + 1$ , ni donc à aucun ordre supérieur.

C'est ce théorème qui nous a fait dire que les nombres qui s'approximent le mieux sont les plus compliqués : en effet, si un nombre s'approxime à un ordre élevé, il est soit racine d'un polynôme de degré grand, soit (encore pire) transcendant. Les irrationnels les plus simples (et en particulier les racines carrées des nombres entiers, qui sont algébriques de degré 2) ne sont approximables qu'à l'ordre 2.

Ce théorème peut aussi servir à montrer qu'un nombre donné est transcendant ; mais cette utilisation semble toujours artificielle, puisque les exemples sont toujours taillés sur mesure. Ainsi, Liouville a construit, pour appliquer ce théorème, une famille de réels ; ces nombres sont définis par des séries de la forme suivante :

$$\xi = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^{n!}},$$

où  $a_n \in \mathbf{N}$  et  $1 \leq a_n \leq 9$ . La démonstration du fait que les nombres de Liouville sont approximables à tout ordre et donc transcendants n'est pas très difficile, mais elle est technique, et nous la laissons en exercice pour les lecteurs motivés. Ce qui est surtout intéressant dans l'approche de Liouville est que cette construction fournit explicitement une famille non dénombrable de réels, prouvant que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable et, au passage, que  $\mathbf{R}$  n'est pas dénombrable.

## Bibliographie

– Guinot, *Arithmétique pour amateurs, Une époque de transition : Lagrange et Legendre*, Aléas, 1996.

– Hardy, Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5<sup>e</sup> éd., Oxford University Press, 1975.

---

## 2001 ?

Avez-vous remarqué que 2001 est le **millième du deux millième nombre triangulaire** ?

et que  $2001 = \underbrace{2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4 + 2^4}_{5 \text{ termes}} + 5^4 + 6^4$  ?

– Communiqué par **Maurice Carmagnole** ... en même temps que  
44 décompositions de 2001 en sommes de quatre carrés d'entiers –