

# Zéro, un nombre à part

Frédéric Junier & François Soulard(\*)

## Introduction

Notre expérience d'élèves ainsi que diverses observations dans notre pratique nous ont permis de savoir que les élèves sont souvent confrontés à des problèmes avec zéro. En effet zéro est un cas « à part » dans les pratiques du calcul numérique simple ainsi que dans la représentation des nombres.

Voici quelques exemples simples illustrant la particularité de zéro : zéro n'a pas de signe ou bien les deux à la fois. C'est l'élément neutre additif, l'absorbant multiplicatif, on ne peut diviser par zéro et la puissance 0 d'un nombre vaut toujours 1 sauf pour  $0^0$  justement. Son rôle apparaît contradictoire : il dénombre l'ensemble vide mais ce sont les puissances de 10 c'est à dire le nombre de « 0 » qui permettent l'écriture des grands nombres.

Dans des classes de quatrième et de seconde, à partir d'une enquête sur la représentation sociale de zéro, et d'un QCM contenant opérations élémentaires et équations du premier degré, nous essayons de comprendre les difficultés et les intérêts qu'apporte la spécificité de zéro. De l'enquête on dégage sept représentations et des deux QCM on propose quatre théorèmes-élèves.

Ces études sont faites en classes de quatrième et de seconde à l'occasion de notre mémoire professionnel à l'IUFM.

## I. Enquête sur zéro

Auprès de nos élèves, nous avons fait une même enquête afin de repérer les diverses représentations sociales de zéro au moyen de questions variées et ouvertes (annexe 1). En fonction des expressions et du vocabulaire utilisés nous avons essayé de regrouper en famille les différents types de représentations auxquelles faisaient référence les élèves. Nous avons dégagé ainsi sept représentations. Vingt-cinq élèves de quatrième et 36 de seconde ont répondu à l'enquête.

### 1) Zéro élément de la comptine

Type de réponse d'élèves : « Zéro c'est le chiffre (le nombre) avant 1 ». Cette définition de zéro est proposée par cinq élèves de quatrième, mais aucun en seconde.

Lorsque les enfants jouent avec les nombres par exemple lors d'un compte, zéro est le premier ou le dernier élément.

### 2) Zéro référentiel ou frontière entre le positif et le négatif

Type de réponse d'élèves : « Zéro est utilisé pour la température », « Zéro est le nombre qui sépare les nombres positifs et négatifs », « Zéro est entre -1 et 1 ».

(\*) stagiaires à l'IUFM de Lyon en 98/99.

Sept élèves de seconde définissent zéro comme frontière contre deux en quatrième. De plus à la question n° 5 : « Qu'y a-t-il en dessous de zéro ? », six élèves de quatrième répondent « rien » ou ne répondent pas. En seconde, seulement deux élèves ne répondent pas. Ce constat laisse à penser que les élèves de seconde seraient plus familiers avec cette représentation.

### 3) Zéro dénombre un ensemble vide (notion discrète)

Type de réponse d'élèves : « Il y a zéro pomme dans le panier ». Nous supposons que les élèves sont habitués dans le primaire à dénombrer des ensembles finis (on compte sur ses doigts...). Quand on les a enlevés un à un jusqu'au dernier, on dit alors qu'il y a « zéro objets ».

Pour expliquer l'apparition tardive du zéro (question n° 9), certains élèves proposent l'argument de l'inutilité de zéro dans les dénombrements quotidiens (par exemple le cheptel).

### 4) Zéro nombre qui représente le rien (notion continue)

Type de réponse d'élèves : « Il y a zéro litre de jus de pomme dans la bouteille ». Cette notion continue a été retrouvée chez les élèves pour lesquels zéro représente le vide, le rien. Pour ces mêmes élèves, le fait que zéro représente le rien explique son apparition tardive. Les secondes citent plus souvent cette notion continue que les quatrièmes (43% contre 20%). Nous expliquons cette différence par une plus grande habitude au quotidien des nombres décimaux rationnels et réels pour les élèves de seconde. On peut remarquer aussi que l'utilisation des nombres décimaux au collège est très souvent liée aux unités de mesure : longueur, poids, volume... et un objet qui pèse 0 gramme n'a pas d'aspect concret.

### 5) Zéro chiffre utile dans l'écriture des nombres

Type de réponse d'élèves : « Zéro sert à écrire de grands nombres », « Zéro n'est pas un nombre, c'est un chiffre ».

Ici les justifications et les exemples donnés par les élèves sur l'utilité de zéro sont exclusivement en référence au chiffre (écrit avec d'autres chiffres évidemment). Zéro n'est pas un nombre en tant que tel, mais c'est seulement un symbole pour construire des nombres.

### 6) Zéro symbole qui s'écrit comme un rond, un ovale

Type de réponse d'élèves : « Zéro c'est rond comme un œuf ».

Ces réponses sont plutôt rares mais nous ont frappés car pour ces quelques élèves, la définition de zéro se réduit à la manière de l'écrire.

Peut-être y a-t-il un rapport pour les élèves avec l'expression qu'ils utilisent souvent : « zéro sert à arrondir » (question n° 8).

### 7) Zéro note synonyme de sanction ou d'échec

Type de réponse d'élèves : « Zéro est inutile pour la notation », « Zéro est un inconvénient quand on a 0/20 ». La fréquence de ces réponses nous a questionnés sur le vécu des élèves quant à la notation.

### Conclusion de l'enquête :

Suivant les représentations, il y a des différences dans les réponses entre les quatrièmes et les secondes. Par exemple, on remarque que les élèves de quatrième répondent que zéro est pair plus facilement que les secondes. Cela est sûrement dû à la représentation « référentiel » plus fréquemment utilisée par les secondes mais qui n'aide pas pour la parité, alors qu'en quatrième la représentation la plus utilisée est celle de la comptine (l'alternance pair/impair de la comptine aide à affirmer que zéro est pair).

On retrouve très fortement l'idée que zéro est un chiffre qui sert à écrire non seulement les nombres mais surtout « les grands nombres » (avec beaucoup de zéros...). La notion de zéro comme nombre à part entière est rare. Ceci explique peut-être le malaise de certains élèves face à un résultat d'équation égal à zéro : « Je n'ai pas trouvé de solution ».

On retrouve historiquement la nécessité du zéro-chiffre dans l'écriture des nombres et des grands nombres et la difficulté qu'il a eue à apparaître comme un nombre intervenant dans les calculs.

## II. QCM d'opérations arithmétiques avec zéro (Annexe 2)

Ce premier QCM (annexe 1-b) contient des calculs élémentaires avec zéro (les quatre opérations et les puissances). Pour chaque question, les élèves avaient le même choix de réponses :  $1$  ;  $-1$  ;  $0$  ;  $1/3$  ;  $3$  ;  $-3$  ; impossible.

Nous avons analysé les réponses à trois niveaux : d'abord pour un même élève en détectant les différences d'erreurs entre des questions apparemment similaires (par exemple  $3 + 0$  et  $0 + 0$  ou bien  $0 \times 3$ ,  $3 \times 0$  et  $0 \times 0 \dots$ ). Ensuite en repérant les erreurs les plus fréquentes en quatrième puis en seconde. Enfin, le dernier type d'analyse a été de comparer les résultats seconde/quatrième en essayant d'expliquer les différences les plus nettes entre les deux niveaux. Nous avons dégagé ainsi quatre règles ou « théorèmes-élèves » qui nous semblaient synthétiser les différentes attitudes des élèves face aux calculs :

### Zéro élément neutre :

« *Zéro ne change rien dans un calcul* ».

Nous attendions pour les opérations  $0 + 0$ ,  $0 + 3$ ,  $3 + 0$  et  $0 - 0$  100% de bonnes réponses. En classe de quatrième, sur 25 élèves, quatre répondent impossible pour le calcul  $0 + 0$ , et huit pour  $0 - 0$ . À l'opération  $3 / 0$ , 29% des élèves donnent le résultat égal à 3. En seconde, seulement 2 élèves sur 36 proposent cette réponse. Un quart des élèves de quatrième écrivent  $0 / 3 = 3$ ,  $(-3)^0 = -3$ ,  $0 \times (0 - 1) = -1$  et  $3^0 = 3$ . Ces réponses ont été retrouvées chez seulement un élève de seconde. La règle du zéro élément neutre semble être plus présente chez les élèves de quatrième. Enfin, on retrouve le même type d'observation avec les calculs  $0/0$  et  $0^0$  qui gênent plus facilement les élèves de quatrième que les secondes. Nous l'expliquons par ce raisonnement : « *Ne rien changer à quelque chose qui ne change rien est impossible !* ».

**Zéro absorbant :**

« *Tout devient nul quand zéro intervient* ».

En quatrième, pour les équations  $3/0$  et  $0/0$ , les élèves donnent le résultat égal à zéro dans respectivement 50% et 75% des cas. Les égalités  $3 - 0 = 0$ ,  $3^0 = 0$  sont également souvent proposées par les élèves. En seconde, le résultat zéro est proposé par 14% des élèves pour le calcul  $3/0$ .

On pourrait résumer ainsi « *Quand zéro n'est pas neutre il est absorbant* ». Cette notion d'élément absorbant est beaucoup plus marquée pour les élèves de quatrième.

**Zéro dénombre l'ensemble vide :**

« *Il est impossible d'enlever des éléments à un ensemble vide* ».

Exemple : en quatrième pour le calcul  $0 - 3$ , 25% des élèves répondent 3, 0 ou impossible, cette question ne pose pas de problème aux secondes. Nous pensons ici que les élèves utilisent les représentations « Zéro dénombre l'ensemble vide » ou « Zéro représente le rien ». Ceci pose des problèmes notamment pour la soustraction (par exemple en enlevant les éléments un à un d'un ensemble de pommes dans un panier).

**Zéro danger :**

« *Il faut se méfier quand il y a zéro, ce n'est pas comme d'habitude* ».

Cette prudence est surtout acquise par les élèves de seconde qui par leur vécu d'élèves semblent être trop prudents dans les calculs contenant zéro et cela a des conséquences :  $0/3$  est impossible dans 32% des cas en seconde contre 17% en quatrième.

On peut remarquer que, alors que les trois premiers théorèmes-élèves sont plus marqués pour les élèves de quatrième, le dernier semble plus affirmé en classe de seconde.

**III. QCM d'équations avec zéro**

Dans cette deuxième série de questions (annexe 1-c) on demandait aux élèves de déterminer toutes les valeurs de  $x$  possibles vérifiant l'égalité donnée. Ils avaient le choix entre les réponses suivantes :  $x = 1$  ;  $x = -1$  ;  $x = 0$  ;  $x = 1/3$  ;  $x = 3$  ;  $x = -3$  ; *pas de solution* ; *tout nombre  $x$  est solution* ; *tout nombre  $x$  sauf «  $x = 0$  » est solution*. Nous n'avons pas employé le mot équation car le chapitre équation n'avait pas été étudié en quatrième.

La comparaison quatrième/seconde nous paraissait particulièrement intéressante. En effet, les quatrièmes ne pouvaient déterminer les réponses que par une démarche par essai/erreurs. Ils ne pouvaient pas faire appel à des méthodes de résolution qu'ils n'avaient pas encore apprises.

Nos hypothèses concernant les résultats étaient en faveur de meilleures performances pour la classe de seconde. Il a été surprenant de constater que cette hypothèse n'a pas toujours été confirmée. En effet, voici, les résultats principaux :

À l'équation  $0/x = 1$ , 48% des élèves de quatrième répondent qu'il n'y a pas de solution contre seulement 38% en classe de seconde.

À l'équation  $x/0 = 3$ , 46% des élèves de quatrième répondent qu'il n'y a pas de solution contre 77% en classe de seconde.

Aux équations  $0x = 0$  ;  $0x = 3$  ;  $3x = 3$  ;  $1/x = 0$  et  $3/x = 0$ , les résultats sont équivalents en quatrième et en seconde.

À noter, qu'en quatrième 54% des élèves répondent correctement à l'équation  $0x = 0$  c'est à dire « tout  $x$  est solution » ce qui signifie qu'ils envisagent bien la possibilité de plusieurs solutions à une équation. Nous pensions qu'ils procéderaient par tâtonnement ce qui les inciterait à s'arrêter dès qu'ils auraient trouvé une solution, ce qui n'a pas été le cas.

Dans tous ces calculs, les quatrièmes font certainement un lien direct entre l'équation donnée et le résultat : j'essaie telle valeur, je regarde si ça marche, puis j'essaie d'autres valeurs. En seconde beaucoup peuvent appliquer des « recettes » sans voir si cela convient dans l'équation donnée. On peut noter que la baisse de performances dans un apprentissage nouveau est un phénomène fréquent car souvent il faut renoncer au savoir empirique précédent avant de pouvoir acquérir un savoir nouveau et peut-être que les secondes sont encore dans cette phase creuse de l'apprentissage.

Du QCM nous retenons que les élèves de quatrième donnent beaucoup de sens à zéro mais leurs références font souvent appel au primaire (notamment pour la division). Les secondes sont davantage prudents dans les résultats où intervient zéro (dans le calcul ou le résultat).

## Annexe 1 : enquête et QCM.

### a) Enquête sur zéro

*Le but de cette enquête est de savoir ce que zéro représente pour les gens dans la vie courante. Voici quelques exemples de questions posées :*

1. Donner deux exemples où zéro est un avantage, un inconvénient.
2. Est-ce que zéro est un nombre ?
3. Donner des exemples où zéro est utilisé, puis où zéro est inutile.
4. Essayer d'expliquer ce qu'est zéro à quelqu'un qui n'en a jamais entendu parler.
5. Qu'y a-t-il en dessous de zéro ?
6. Est-ce que zéro a une valeur ? Pourquoi ?
7. À votre avis zéro est-il pair ou impair ?
8. Zéro sert-il à quelque chose ? Donner un ou deux exemples.
9. Quand les hommes ont commencé à utiliser les chiffres ils n'utilisaient pas le chiffre zéro et ils ont mis très longtemps à s'en servir. À votre avis pourquoi ?
10. Pourriez-vous vous passer de zéro dans la vie courante ? Pourquoi ?

**b) QCM d'opérations arithmétiques sur zéro**

Ce QCM contient des calculs élémentaires avec zéro (les quatre opérations et les puissances). Pour chaque question, les élèves avaient le même choix de réponses : 1 ; -1 ; 0 ; 1/3 ; 3 ; -3 ; impossible.

- |                   |                     |                                   |
|-------------------|---------------------|-----------------------------------|
| 1) $0 + 0 =$      | 10) $3^0 =$         | 15) $\frac{0}{0} =$               |
| 2) $0 + 3 =$      | 11) $0^3 =$         | 16) $3 \times (1 - 1) =$          |
| 3) $3 + 0 =$      | 12) $(-3)^0 =$      | 17) $(1 - 1)^2 =$                 |
| 4) $0 - 0 =$      | 13) $\frac{0}{3} =$ | 18) $\frac{1}{3} - \frac{2}{6} =$ |
| 5) $0 - 3 =$      | 14) $\frac{3}{0} =$ | 19) $0 \times (0 - 1) =$          |
| 6) $3 - 0 =$      |                     | 20) $0^0 =$                       |
| 7) $0 \times 3 =$ |                     |                                   |
| 8) $3 \times 0 =$ |                     |                                   |
| 9) $0 \times 0 =$ |                     |                                   |

**c) QCM d'opérations arithmétiques sur zéro**

Dans cette deuxième série de questions on demandait aux élèves de déterminer toutes les valeurs de  $x$  qui vérifiaient l'égalité donnée. Ils avaient le choix entre les réponses suivantes :  $x = 1$  ;  $x = -1$  ;  $x = 0$  ;  $x = 1/3$  ;  $x = 3$  ;  $x = -3$  ; pas de solution ; tout nombre  $x$  est solution ; tout nombre  $x$  sauf " $x = 0$ " est solution.

- |                     |                       |                       |
|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| 1) $3 - x = 0$      | 9) $\frac{0}{x} = 1$  | 12) $\frac{1}{x} = 0$ |
| 2) $3 + x = 0$      |                       |                       |
| 3) $0 + x = 0$      |                       |                       |
| 4) $0 - x = 0$      | 10) $\frac{x}{0} = 3$ | 13) $\frac{3}{x} = 0$ |
| 5) $0 \times x = 0$ |                       |                       |
| 6) $0 \times x = 3$ | 11) $\frac{0}{x} = 0$ | 14) $\frac{x}{3} = 0$ |
| 7) $3 \times x = 0$ |                       |                       |
| 8) $3 \times x = 3$ |                       |                       |

## Annexe 2

Nous avons fait *a priori* pour constituer notre QCM un inventaire des erreurs connues ou supposées de nos élèves. À partir de là chaque calcul se voit proposer une première et une deuxième réponse attendues (par exemple pour la question «  $0 - 3 =$  », nous pensions que la majorité des élèves de quatrième répondraient -3 et une partie 3, les résultats obtenus confirment notre analyse sauf pour 3 élèves).

Attention, nous parlons en pourcentage et ce sont des classes de 25 et 36 élèves ce qui signifie que 12% représente 3 ou 4 élèves.

## Classe de second

Questions	1 <sup>re</sup> réponse attendue	2 <sup>e</sup> réponse attendue	Réponse la plus fréquente	Pourcentage	Réponses suivantes	Pourcentage
$0 + 3 =$	3		3	100%		
$3 + 0 =$	3		3	100%		
$0 - 0 =$	0		0	93%	impossible	7%
$0 - 3 =$	-3		-3	97%	0	
$3 - 0 =$	3		3	93%	-3	
$0 \times 3 =$	0		0	100%		
$3 \times 0 =$	0		0	100%		
$0 \times 0 =$	0		0	93%	impossible	7%
$3^0 =$	1	0	1	77%	impossible 0 3	10% 10% 3%
$0^3 =$	0	impossible	0	93%	impossible	7%
$(-3)^0 =$	1	-1	-1	33%	1 0 impossible -3	22% 19% 19% 7%
$\frac{0}{3} =$	0	-3	0	68%	impossible	32%
$\frac{3}{0} =$	impossible	3	impossible	62%	3 0	24% 14%
$3 \times (1 - 1) =$	0		0	89%	3 -3	7% 4%
$0 \times (0 - 1) =$	0		0	86%	-1	14%
$0^0 =$	1	impossible	0	48%	1 impossible	45% 7%

## Classe de quatrième

Questions	1 <sup>re</sup> réponse attendue	2 <sup>e</sup> réponse attendue	Réponse la plus fréquente	Pourcentage	Réponses suivantes	Pourcentage
$0 + 0 =$	0		0	92%	impossible	8%
$0 + 3 =$	3		3	100%		
$3 + 0 =$	3		3	100%		
$0 - 0 =$	0		0	87,5%	impossible	12,5%
$0 - 3 =$	-3	3	-3	75%	3 0 impossible	12,5% 4% 8,5%

Questions	1 <sup>re</sup> réponse attendue	2 <sup>e</sup> réponse attendue	Réponse la plus fréquente	Pourcentage	Réponses suivantes	Pourcentage
$3 - 0 =$	3		3	87,5%	0	12,5%
$0 \times 3 =$	0	3	0	96%	0	4%
$3 \times 0 =$	0	3	0	87,5%	3	12,5%
$0 \times 0 =$	0		0	87,5%	impossible	12,5%
$3^0 =$	1	3	1	33%	3 impossible 0	25% 25% 17%
$0^3 =$	0	3	0	75%	impossible autres	12,5% 12,5%
$(-3)^0 =$	-1	1 ou -3	-3	46%	impossible 0 1 autres	17% 17% 8% 12%
$\frac{0}{3} =$	0	impossible	0	46%	3 impossible autres	17% 17% 10%
$\frac{3}{0} =$	impossible	0	0	50%	3 impossible autres	29% 12,5% 8,5%
$\frac{0}{0} =$	impossible	1	0	75%	impossible	25%
$3 \times (1 - 1) =$	0		0	71%	3 autres	21% 8%
$(1 - 1)^2 =$	0	1	0	83%	impossible autres	8% 9%
$\frac{1}{3} - \frac{2}{6} =$	0	1/3	0	71%	3 autres	8% 21%
$0 \times (0 - 1) =$	0	-1	0	71%	-1 impossible autres	13% 8% 8%
$0^0 =$	0	impossible	0	54%	1 impossible autres	21% 17% 8%

## Annexe 3

## QCM d'équations avec zéro : Tableau des résultats attendus et obtenus

Les élèves avaient la question : donner toutes les valeurs possibles de  $x$  qui vérifient les égalités suivantes.

## Classe de quatrième

Questions	1 <sup>re</sup> réponse attendue	2 <sup>e</sup> réponse attendue	Réponse la plus fréquente	Pourcentage	Réponses suivantes	Pourcentage
$3 - x = 0$	3		3	80%	autres	20%
$3 + x = 0$	-3	3	-3	50%	pas de sol. autres	30% 20%
$0 + x = 0$	0		0	87%	tout $x$ autre	8% 4%
$0 - x = 0$	0	tout $x$	0	80%	pas de sol. autres	8% 12%
$0 \times x = 0$	1	tout $x$	tout $x$	54%	0 autres	37% 9%
$0 \times x = 3$	3	pas de solution	pas de solution	80%	3 autres	8% 12%
$3 \times x = 0$	0		0	62%	pas de sol. autres	21% 13%
$3 \times x = 3$	1	0	1	92%	autres	8%
$\frac{0}{x} = 1$	pas de solution	0	pas de solution	48%	1 -1 0 autres	24% 12% 8% 8%
$\frac{x}{0} = 3$	pas de solution	3	pas de solution	46%	3 -3 autres	38% 8% 8%
$\frac{0}{x} = 0$	1	tout $x$ tout $x$ sauf zéro	0	67%	tout $x$ 3 autres	19% 11% 3%
$\frac{1}{x} = 0$	1	0 pas de solution	0	48%	pas de sol. 1 -1 autres	20% 16% 8% 8%
$\frac{3}{x} = 0$	pas de solution	0	0	44%	pas de sol. 3 -3 autres	20% 16% 8% 12%
$\frac{x}{3} = 0$	0	3	0	36%	pas de sol. 1 3 -1 autres	28% 12% 12% 8% 4%

Classe de seconde

Questions	1 <sup>re</sup> réponse attendue	2 <sup>e</sup> réponse attendue	Réponse la plus fréquente	Pourcentage	Réponses suivantes	Pourcentage
$\frac{3}{x} = 0$	pas de solution		pas de solution	64%	$x = 3$ $x = 0$ tout $x$ sol. $x = -3$ tout $x \neq 0$	9% 9% 9% 4% 4%
$0 \times x = 0$	tout $x$ solution	$x = 1$	tout $x$ solution	63%	$x = 0$ pas de sol.	34% 3%
$0 \times x = 3$	pas de solution		pas de solution	78%	$x = 3$ $x = -3$	13% 9%
$3 \times x = 0$	$x = 0$		$x = 0$	70%	$x = -3$ pas de sol. tout $x$ sol. $x = 3$	15% 8% 4% 4%
$3 \times x = 3$	$x = 1$		$x = 1$	93%	$x = 0$	7%
$\frac{0}{x} = 1$	pas de solution	$x = 0$	pas de solution	38%	$x = 1$ $x = 0$ tout $x \neq 0$	29% 24% 9%
$\frac{x}{0} = 3$	pas de solution		pas de solution	77%	tout $x$ sol. $x = 0$ $x = 3$	11% 8% 4%
$\frac{0}{x} = 0$	tout $x$ solution	tout $x$ sauf zéro	tout $x$ solution	50%	$x = 0$ pas de sol. tout $x \neq 0$ $x = -1$	27% 11% 8% 4%
$\frac{1}{x} = 0$	pas de solution	$x = 0$	pas de solution	40%	$x = 0$ $x = 1$ $x = -1$ tout $x \neq 0$	28% 16% 12% 4%
$\frac{x}{3} = 0$	$x = 0$	$x = 3$	$x = 0$	52%	pas de sol. $x = -3$ tout $x$ sol. $x = 3$ $x = 1/3$	28% 8% 4% 4% 4%