Quelques exercices ayant pour thème l'Euro

Jean-Gullaume Cuaz

Cet article regroupe quelques exercices ayant pour thème un sujet d'actualité : l'Euro. Ces exercices, que chaque professeur pourra adapter à sa classe, traitent du problème des arrondis ; ils sont regroupés par niveau (collège, lycée), et utilisent un large éventail d'outils mathématiques et de méthodes.

On trouvera des exercices sur :
– la question des arrondis : le poids des décimales, la règle d'arrondi au cent le plus proche, les écarts en résultant, les conversions successives, les opérations et les arrondis,
– le maniement des inégalités et des encadrements relatifs à l'Euro.

Chaque exercice est constitué d'un énoncé, de son corrigé ou d'indications de réponses s'il y a lieu et d'un complémént d'information, pouvant servir de base à un exposé général sur l'Euro.

1. Arrondis du taux de conversion

Comme on le voit, le taux de conversion euro-franc comporte six chiffres significatifs. Ceci est assez ennuyeux pour qui veut effectuer une conversion « de tête ». L'exercice suivant peut faire prendre conscience des conséquences d'un arrondi du taux de conversion.

Exercice n° 1

Public concerné : Classe de quatrième.

Un défi à lancer à un élève : Tu me donnes 400 francs et je te rends la valeur d'un euro par jour, et ce pendant 2 mois (30 + 31 = 61 jours). Acceptes-tu ?

Indication de réponse : Vous l'aurez compris, selon que 1 € = 6,55957 F ; 6,5 F ; 6,6 F, l'un ou l'autre des protagonistes sera perdant de … 3 Francs. C'est peu, me direz-vous, mais imaginez un élève susceptible !

Prolongement : Prise en compte du fait qu'une (petite !) erreur d'arrondi réitérée un grand nombre de fois (voir par exemple Exercice n° 5) peut avoir de très lourdes conséquences.

Exercice n° 2 : Une conversion rapide et efficace grâce au calcul mental

Objectif : Donner un procédé rapide de conversion et en évaluer la fiabilité.

Compétences exigées : Factorisation, fractions (somme, inverse), calcul algébrique. Valeur absolue, approximations. Utilisation de la calculatrice.

Public concerné : Première question : classe de troisième. Deuxième et troisième question : classe de seconde.

> Pour convertir en euros une somme donnée en francs, il faut la diviser par 6,559 57. Il existe un moyen mental d'obtenir une bonne approximation de cette conversion : « Pour convertir des francs en euros, il faut ajouter à la somme à convertir sa propre moitié, et diviser le tout par 10 ».
>
> Exemple : conversion de 50 francs en euros :
>
> On ajoute à 50 sa moitié 25, soit 50 + 25 = 75, et on divise le tout par 10. On obtient 7.5 € (le résultat exact est 7.62 €).
>
> 1) Soit x la somme en francs à convertir en euros. Décrire les étapes du calcul de l'énoncé. Peut-on justifier l'intérêt de ce calcul ?
>
> 2) Donner une majoration, en fonction de la somme à convertir, de l'erreur relative commise en utilisant cette méthode.
>
> 3) Pour quelles valeurs de la somme à convertir est-on sûr que cette méthode de conversion fournira une valeur approchée à 0,10 euros ?

Indications de réponse : Si on appelle x la somme en francs à convertir en euros, le procédé mental nous fait donc calculer $\dfrac{x+\dfrac{x}{2}}{10}=\dfrac{3x}{20}=\dfrac{x}{\dfrac{20}{3}}$. Justification : 6,55957 est « proche » de $\dfrac{2}{3}$ de 10 (i. e. $\dfrac{20}{3}$).

L'erreur relative commise en utilisant cette méthode peut s'exprimer en fonction de x par $\left|\dfrac{3x}{20}-\dfrac{x}{6{,}559\,57}\right|\leq|x|\times 2{,}45\times 10^{-3}$. On a alors $|x|\times 2{,}45\times 10^{-3}<0{,}1 \Leftrightarrow x<40{,}84\text{ F}$.

Exercice n° 3

Objectifs et compétences : Maniement des inégalités, résolution d'inéquation. Établissement d'un encadrement. Multiplication/division des termes d'un encadrement par un même nombre.

Public concerné : classe de seconde.

> Se trouvant au Supermarché, M. Untel constate que tous les prix sont affichés en euros. Malheureusement pour lui, il ne se souvient pas du taux de conversion exact. Il se souvient cependant que la valeur d'un euro est comprise entre 6 et 7 francs.
>
> 1) On appelle t la valeur en francs d'un euro. Traduire sous forme d'un encadrement l'hypothèse de l'énoncé.
>
> 2) M. Untel dispose de 200 F sur lui. Si 1   = 6 F, combien de livres de poche à 6 euros peut-il acheter au maximum ? Même question avec 1 € = 7 F.

3) M. Untel achète deux boites de conserve à 2 euros chacune. Donner un encadrement de la valeur en francs de ce dernier achat.

4) Ayant acheté trois livres de poches et deux boites de conserve, M. Untel arrive à la caisse et s'apprête à payer avec son billet de 200 F.

a) Donner un encadrement en francs de la monnaie qui lui sera rendue.

b) (facultatif) Donner un encadrement en euros de la monnaie qui lui sera rendue.

2. Arrondis des conversions

Exercice n° 4

Objectifs : la mise en place de la règle de l'arrondi « au cent le plus proche ».

Compétences exigées : Travaux sur les décimaux. Règle d'arrondis. Utilisation de la calculatrice.

Public concerné : classes de collège.

Rappel de la règle de conversion :
Pour transformer en francs une somme en euros, il faut la multiplier par 6.559 57.
Pour transformer en euros une somme en francs, il faut la diviser par 6.559 57.

Le problème est que le résultat de ces opérations comporte un grand nombre de décimales, et il se peut même que la division ne s'arrête jamais !

1) Combien de décimales sont nécessaires à l'expression d'un prix en euros ?
(on pourra mettre cette question en rapport avec l'exercice n° 1).

2) *Pour aboutir à des valeurs ne comportant que deux chiffres après la virgule les cents ou centimes (appelées cents ou centimes), on applique la règle suivante : Si le troisième chiffre après la virgule est inférieur à 5, on arrondit au cent ou centime inférieur. S'il est égal ou supérieur à 5, on arrondit au cent ou centime supérieur.*

Appliquer cette règle pour convertir 10 F en Euros. Même question avec 35 F et 60 F.

3. Arrondis et opérations

Exercice n° 5

Objectif : Sensibiliser les élèves au fait que la somme des arrondis n'est pas égale (en général) à l'arrondi de la somme.

Compétences exigées : Règle de l'arrondi au cent le plus proche (utilisation possible d'un tableur).

Public concerné : Tout public.

Considérons le relevé bancaire suivant, en francs :

Nature	Crédit	Débit	Solde
Solde précédent			1 000,00
Salaire	10 300,00		11 300,00
Chèque		125,00	11 175,00
CB		235,00	10 940,00
Remise	300,00		11 240,00
Chèque		325,00	10 915,00
CB		190,00	10 725,00
Remise	700,00		11 425,00
		Solde en F	11 425,00

1) Convertir le nouveau solde en euros.

2) Reprendre le relevé en effectuant les opérations suivantes :
– convertir en euros chaque valeur en francs (arrondir à chaque fois en utilisant la règle d'arrondi au cent le plus proche),
– Effectuer les opérations entre ces valeurs en euros.

3) Quel écart constate-t-on entre l'arrondi de la somme et la somme des arrondis ?

Indication de réponse :
Si nous effectuons la conversion en euros du nouveau solde, nous obtenons :

$\dfrac{11\,425}{6{,}559\,57} \approx 1\,741{,}730\,02$ … arrondi à 1741,73 €.

Si en revanche, on effectue la conversion en euros de chaque ligne de calcul, et que l'on effectue les opérations entre ces conversions en euros, on obtiendra :

Nature	Crédit	Débit	Solde
Solde précédent			152,45
Salaire	1 570,22		1 722,67
Chèque		19,06	1 703,61
CB		35,83	1 667,78
Remise	45,73		1 713,51
Chèque		49,55	1 663,96
CB		28,97	1 634,99
Remise	106,71		1 741,70
		Solde en F	1 741,70

L'écart est de 0,03 € à l'arrivée, soit 0,196 787... F, c'est à dire un écart de 20 centimes !

Prolongement : Prise en compte du fait qu'une opération d'arrondi réitérée des milliers de fois peut avoir de très lourdes conséquences. À mettre en relation avec l'exercice n° 1.

4. Le problème de la double conversion

Exercice n° 6

Objectifs : Travailler sur les écarts résultant de conversions et d'arrondis successifs.

Compétences exigées : Maniement des nombres décimaux et des inégalités. Établissement d'un encadrement. Valeur absolue, approximations. Résolution d'inéquation.

Public concerné : classe de seconde.

Convertir 10,01 F en euros, en appliquant la règle officielle de l'arrondi.

Puis reconvertir cette somme en francs, toujours en appliquant la règle officielle de l'arrondi.

Quelle somme a-t-on gagné dans l'opération ?

Généralisons le problème :

On appelle t la valeur d'un euro en franc. On a ainsi $t = 6.559\ 57$.

On suppose que l'on part d'une somme x en francs, et qu'on la convertit en euros. Notons y la contre-valeur en euros, comportant plus de 2 décimales (*a priori* !).

1) Exprimer y en fonction de x et t.

2) Donner un encadrement de la somme $A(y)$ obtenue en appliquant à y la règle d'arrondi au cent le plus proche.

3) Supposons que cette somme $A(y)$ soit reconvertie en francs. On note z la valeur en francs trouvée (avec *a priori* plus de 2 décimales !) Exprimer z en fonction de t et de $A(y)$.

4) Donner un encadrement de la somme $A(z)$ obtenue en appliquant à z la règle d'arrondi au centime le plus proche.

5) Donner un encadrement en fonction de t de l'écart absolu entre z et x observable après cette double conversion.

6) Quelle est la somme maximale que l'on peut gagner (ou perdre) dans une telle opération ? À partir de quelle valeur de t pourrait-on voir apparaître des écarts de 4 centimes ?

7) Recommencer l'exercice en partant cette fois-ci d'une somme en euros, convertie en francs, puis reconvertie en euros. Que constate-t-on ? Quelle explication peut-on fournir ?

Indications de réponses et prolongements : Cas d'une double conversion franc → euro → franc.

1) $y = \frac{x}{t}$.

2) Étant donné qu'en appliquant la règle d'arrondi au cent le plus proche, on peut provoquer un écart d'au plus 0,005 €, on a :

$$\frac{x}{t} - \frac{1}{200} < \mathrm{A}(y) < \frac{x}{t} + \frac{1}{200}.$$

3) $z = t \times \mathrm{A}(y)$.

4) À partir des questions 2) et 3), on établit que

$$x - \frac{t}{200} < z < x + \frac{t}{200},$$

donc :

$$x - \frac{t}{200} - \frac{1}{200} < \mathrm{A}(z) < x + \frac{t}{200} + \frac{1}{200},$$

c'est à dire :

$$x - \frac{t+1}{200} < \mathrm{A}(z) < x + \frac{t+1}{200}.$$

5) L'inégalité précédente donne :

$$\frac{t+1}{200} < \mathrm{A}(z) - x < \frac{t+1}{200}.$$

6) On en déduit que

$$\left|\mathrm{A}(z) - x\right| < \frac{t+1}{200}.$$

Finalement la différence maximale entre la somme de départ x et la somme d'arrivée après double conversion est de $\frac{t+1}{200}$ francs. Pour t = 6,559 57, cet écart représente 0,038 F (3,8 centimes). Mais comme x et z sont des nombres entiers de centimes, la différence est au maximum de 3 centimes (dans un sens ou dans un autre).

Pour constater un écart de 4 centimes, il faudrait que $\frac{t+1}{200} \geq 0{,}04$, c'est à dire que $t \geq 7$. À partir d'1 € = 7 F, on pourrait constater des écarts supérieurs à 4 centimes.

7) On suppose qu'on part d'une somme x en euros, et qu'on la convertit en francs. Notons y la contre-valeur en francs, comportant plus de 2 décimales (*a priori* !)
Exprimer y en fonction de x et t : $y = t \times x$.

Encadrement de la somme A(y). Étant donné qu'en appliquant la règle d'arrondi au centime le plus proche, on peut provoquer un écart d'au plus 0,005 francs, on a :

$$tx - \frac{1}{200} < \mathrm{A}(y) < tx + \frac{1}{200}.$$

Supposons que cette somme A(y) soit reconvertie en euros. On note z la valeur en euros trouvée, avec *a priori* plus de 2 décimales. En fonction de t et de A(y), on a : $z = \frac{A(y)}{t}$.

Encadrement de la somme A(z). À partir des questions précédentes, on établit que

$$x - \frac{1}{200 \times t} < z < x + \frac{1}{200 \times t},$$

donc :

$$x - \frac{1}{200t} - \frac{1}{200} < A(z) < x + \frac{1}{200 \times t} + \frac{1}{200},$$

c'est à dire :

$$x - \frac{t+1}{200t} < A(z) < x + \frac{t+1}{200 \times t}.$$

Encadrement en fonction de t de l'écart absolu entre z et x observable après cette double conversion :

$$\left| A(z) - x \right| < \frac{t+1}{200 \times t} < 5{,}763 \times 10^{-3}.$$

Lors d'une double conversion euro → franc → euro, on ne constate aucun écart dû aux arrondis. Ceci restera vrai tant que un euro vaudra plus d'un franc.

Exercice n° 7 : Conversions consécutives – idempotence

Objectifs : Composition d'applications. Évolution des erreurs d'arrondi lors de conversions successives.

Public concerné : Enseignement supérieur.

Remarque : on suppose les exercices précédents assimilés (surtout l'exercice n° 6).

Notons F l'ensemble des montants possibles en francs et E l'ensemble des montants possibles en euros (dans les deux cas, il s'agit de nombres réels multiples de 0,01).

On définit deux opérations :

ef : E → F qui convertit un montant en euros en un montant en francs,

et

fe : F → E qui convertit un montant en francs en un montant en euros,

Par exemple *ef*(x) = A(xt) et *fe*(y) = $A\left(\frac{y}{t}\right)$, où t est le taux de conversion (t = 6,559 57) et A est l'opération d'arrondi au centième le plus proche.

1) Démontrer que $ef \circ fe$ est idempotent.

2) Par quelle propriété sur les arrondis cela se traduit-il ?

Éléments de réponse :

Le problème est de savoir, comment se composent les applications *ef* et *fe*.

On a vu dans l'exercice n° 6 que $fe \circ ef$ était l'identité de E, c'est à dire $fe(ef(x)) = x$ pour tout x. Ceci est dû au fait que t est plus grand que 1.

En d'autres termes, *ef* est l'inverse à droite de *fe*, et donc *ef* est injective, et *fe* est surjective

En revanche, $ef \circ fe$ est différente de l'identité, l'écart pouvant atteindre 0,03 centimes.

Quand on convertit plus de deux fois, on fait par exemple $ef \circ fe \circ ef \circ fe \circ ef \circ fe$ (c'est à dire francs → euros → francs → euros → francs → euros → francs), on peut se dire que chaque $ef \circ fe$ va faire varier le montant d'au plus 3 centimes, et que si on n'a pas de chance, ces effets vont se cumuler pour atteindre dans ce cas 9 centimes. Il n'en est rien, heureusement ; on peut en effet écrire :

$$ef \circ fe \circ ef \circ fe \circ ef \circ fe = ef \circ (fe \circ ef) \circ (fe \circ ef) \circ fe = ef \circ fe,$$

et donc l'écart sera au plus de 3 centimes, quel que soit le nombre de conversions successives. En d'autres termes, $ef \circ fe$ est idempotent (c'est à dire $(ef \circ fe)^2 = ef \circ fe$).

5) Les conversions entre monnaies européennes via l'euro (conversions unitaires croisées)

Pour une conversion franc-mark, par exemple, les textes officiels disent :

« *Il faut effectuer deux opérations consécutives puisqu'il n'y a plus de taux de change entre deux monnaies :*

Montant en francs/taux de conversion euro-franc = montant intermédiaire en euros.

Montant intermédiaire en euros × taux de conversion euro-mark = montant en marks.

Ce montant intermédiaire doit être arrondi à au moins trois décimales.

Le règlement prévoit que toute autre méthode qui produit les mêmes résultats peut être utilisée.

Commentaire : dans le cas de conversion unitaire croisée, la proposition de règlement est claire et suffisante ».

Il y a une ambiguïté qui réside dans la phrase : « *Ce montant intermédiaire doit être arrondi à au moins trois décimales.* »

En effet, on peut obtenir des résultats différents selon le nombre de décimales utilisées pour le montant intermédiaire.

Notons t le taux de conversion euro → franc et u le taux de conversion euro → deutschemark. On a $t = 6{,}559\,57$ et $u = 1{,}955\,83$.

Une somme x en francs est d'abord convertie en une somme $x_k = \mathrm{A}_k\left(\dfrac{x}{t}\right)$ en euros, où A_k est l'opération « arrondi au plus proche avec k décimales ». Puis x_k est convertie en $z_k = \mathrm{A}(x_k \times u)$ où $\mathrm{A} = \mathrm{A}_2$.

On a :

$$\left| x_k - \frac{x}{t} \right| < 0{,}5 \times 10^{-k}$$

et

$$\left| z_k - x_k \times u \right| < 0{,}005 .$$

Finalement

$$\left| z_k - \frac{x}{t} \times u \right| < 0{,}5 \times (0{,}01 + u \times 10^{-k}) < 0{,}006$$

puisque $k \geq 3$ et $u < 2$.
Pour deux valeurs de k différentes, mettons 3 et 4, on a donc

$$\left| z_3 - z_4 \right| \leq \left| z_3 - \frac{x}{t} \times u + \frac{x}{t} \times u - z_4 \right| \leq \left| z_3 - \frac{x}{t} \times u \right| + \left| z_4 - \frac{x}{t} \times u \right| \leq 2 \times 0{,}006 = 0{,}012.$$

Comme ce sont des nombres entiers de pfennigs, la différence est au plus de 0,01 DM.
Cette différence est-elle vraiment possible ? Oui.

Par exemple, voici 5 exemples entre 0 F et 1 F :

Somme F	Arrondi euro 3 décimales	Reconversion Mark	Arrondi euro 3 décimales	Reconversion Mark	Différence entre les 2
0,05	0,008	0,02	0,0076	0,01	0,01
0,52	0,079	0,15	0,0793	0,16	–0,01
0,62	0,095	0,19	0,0945	0,18	0,01
0,72	0,11	0,22	0,1098	0,21	0,01
0,79	0,12	0,23	0,1204	0,24	–0,01

Augmenter le nombre de chiffres du résultat intermédiaire ne fait que raréfier le problème, sans l'éliminer. Pour être complètement explicite, le règlement aurait dû imposer le nombre de décimales à utiliser pour le résultat intermédiaire, ou mieux, donner une procédure sans arrondi intermédiaire : c'est facile, il suffit de faire la multiplication d'abord, c'est à dire de calculer $w = x \times u$ de manière exacte (7 décimales), puis $z = \mathrm{A}\left(\frac{w}{t}\right)$, mais w est alors dans une unité qui n'existe pas, ce qui doit être difficile à faire accepter aux financiers.