

Les problèmes de l'APMEP

Dans le précédent bulletin, la rubrique problèmes contenait un nouvel énoncé et des solutions de l'Olympiade 1999. En compensation, la présente rubrique propose les six énoncés de l'Olympiade 2000, qui s'est tenue à Taejon (Corée), les 19 et 20 juillet 2000, et une solution de l'énoncé n° 275.

Les solutions et commentaires des problèmes de l'Olympiade, dont je ferai la synthèse prochainement, ainsi que les nouvelles propositions d'énoncés (avec solutions jointes), sont à envoyer à l'adresse suivante (réponse à des problèmes différents sur des feuilles séparées S.V.P., sans oublier votre nom sur chaque feuille) :

François LO JACOMO,
42 quai de la Loire
75019 PARI

41^e Olympiade Internationale de Mathématique Premier jour, Taejon, 19 juillet 2000 Durée 4 h 30

Problème 1

Deux cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en M et N. Soit l la tangente commune à Γ_1 et Γ_2 telle que M soit plus proche de l que N. La droite l est tangente à Γ_1 en A et à Γ_2 en B. La droite passant par M et parallèle à l rencontre à nouveau le cercle Γ_1 en C et le cercle Γ_2 en D. Les droites CA et DB se coupent en E ; les droites AN et CD se coupent en P ; les droites BN et CD se coupent en Q. Montrer que EP = EQ.

Problème 2

Soient a, b, c trois nombres réels strictement positifs vérifiant $abc = 1$. Montrer que $(a - 1 + (1/b))(b - 1 + (1/c))(c - 1 + (1/a)) \leq 1$.

Problème 3

Soit $n \geq 2$ un entier. Au début, il y a n puces sur une droite horizontale, pas toutes au même point. Pour un nombre réel strictement positif λ , on définit un mouvement de la façon suivante :

- on choisit deux puces situées aux points A et B, avec A à gauche de B ;
- alors la puce en A saute au point C, situé sur la même droite, à droite de B et tel que $BC/AB = \lambda$.

Trouver toutes les valeurs de λ telles que, pour tout point M sur la droite et pour toutes positions initiales des n puces, il existe une suite finie de mouvements qui amène toutes les puces à droite de M.

Deuxième jour, Taejon, 20 juillet 2000

Durée : 4 h 30

Problème 4

Un magicien a cent cartes numérotées de 1 à 100. Il les répartit dans trois boîtes, une rouge, une blanche et une bleue, de telle sorte que chaque boîte contienne au moins une carte. Un spectateur choisit deux de ces trois boîtes, tire une carte dans chacune d'elles et annonce la somme des nombres figurant sur les cartes tirées. Connaissant cette somme, le magicien identifie la boîte dans laquelle aucune carte n'a été tirée. De combien de façons la magicien peut-il répartir les cartes dans les boîtes de telle sorte que ce tour de magie réussisse toujours ?

(Deux façons de répartir les cartes sont considérées comme différentes si au moins une carte est placée dans deux boîtes différentes).

Problème 5

Existe-t-il un entier strictement positif n tel que : n soit divisible par exactement 2000 nombres premiers distincts et $2^n + 1$ soit divisible par n ?

Problème 6

Soient AH_1 , BH_2 , CH_3 les hauteurs d'un triangle ABC dont tous les angles sont aigus. Le cercle inscrit dans le triangle ABC est tangent respectivement aux côtés BC , CA , AB en T_1 , T_2 , T_3 . On désigne respectivement par l_1 , l_2 , l_3 les symétriques des droites H_2H_3 , H_3H_1 , H_1H_2 par rapport aux droites T_2T_3 , T_3T_1 , T_1T_2 . Montrer que l_1 , l_2 , l_3 déterminent un triangle dont les sommets appartiennent au cercle inscrit dans le triangle ABC .

Solution de l'énoncé n° 275

Énoncé (Pierre DANIEL, 07-Beauchastel)

Un segment $[AB]$ étant donné, H est un point quelconque du cercle de diamètre $[AB]$. Le cercle de centre H , de rayon HA , coupe en I et J la parallèle à (AB) passant par H , et le trapèze $ABIJ$ est convexe.

Déterminer le lieu des points P et Q , respectivement intersection des diagonales de $ABIJ$ et intersection des côtés (AJ) et (BI) .

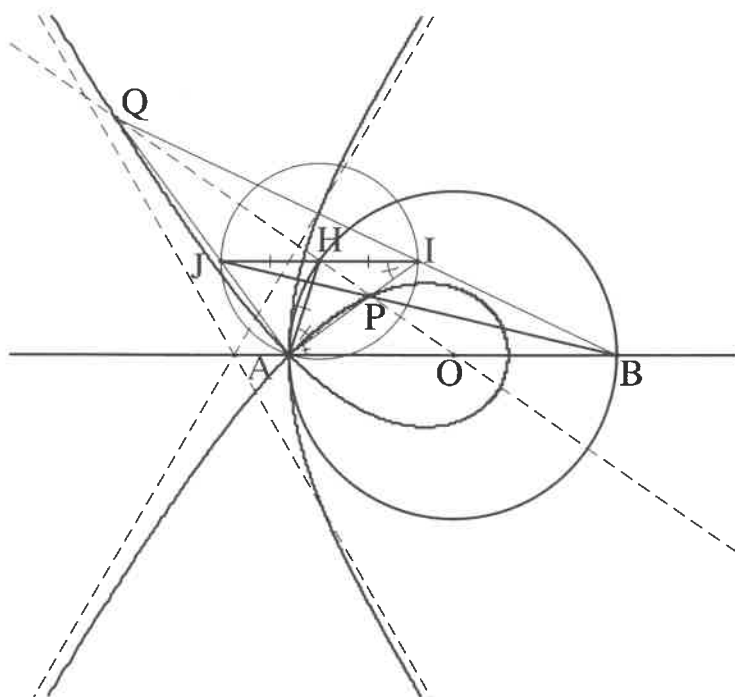
SOLUTION

Simple exercice de taupé ou belle occasion de mettre en valeur Cabri Géomètre, cet énoncé ne présentait pas de difficulté théorique ni d'intérêt géométrique particulier : je mettrai donc l'accent sur la diversité des approches possibles.

J'ai reçu, en effet, 14 réponses, de : Jacques BOUTELOUP (76-Rouen), Christophe BRIGHI (57-Hettange Grande), Marie-Laure CHAILLOUT

(95-Sarcelles), Jacques DAUTREVAUX (06-St André), Edgard DELPLANCHE (91-Créteil), Alain LARROCHE (06-Nice), Pierre MANACH (56-Lorient), René MANZONI (76-Le Havre), Charles NOTARI (31-Montaut), Maurice PERROT (75-Paris), Raymond RAYNAUD (04-Digne), Pierre RENFER (67-Ostwald), Jean-Paul ROUX (42-Unieux) et Eric SIGWARD (57-Sarreguemines). Comme les deux tiers des lecteurs (y inclus l'auteur), je considérerai que le point A est à gauche de B.

La figure formée par le « trapèze complet » ABIJ est classique : que l'on considère la droite (PQ) comme la polaire du point à l'infini de (AB) par rapport aux droites (QA) et (QB), ou que l'on voie en P et Q les centres des homothéties transformant le segment AB en IJ et JI respectivement, il est clair que la droite (PQ) passe par les milieux H et O de JI et AB. Dès lors, onze lecteurs ont centré leur repère en O, milieu de AB, et quatre l'ont centré en A.



Par ailleurs, plusieurs ont signalé que AI et AJ sont les bissectrices de l'angle HAB, que ce soit parce que les triangles HAI et HAJ sont isocèles ou parce que (AI) et (AJ) sont des droites perpendiculaires coupant OH en P et Q, conjugués

harmoniques par rapport à O et H. Charles Notari en a déduit : $\frac{HA}{AO} = \frac{HP}{PO}$.

D'ailleurs, connaissant tous les angles des triangles APO et AQO, il était facile d'en déduire l'équation polaire de la courbe (tant dans un repère centré en A que dans un repère centré en O), mais la plupart des lecteurs ont préféré exprimer l'alignement des points, soit par un calcul immédiat de déterminant, soit en calculant une

intersection de droites en équations cartésiennes, soit en utilisant les nombres complexes : Christophe Brighi signale que trois points d'affixes a, b, c sont alignés si et seulement si $a\bar{b} + b\bar{c} + c\bar{a}$ est réel.

S'il faut choisir parmi les différentes méthodes proposées, j'opterai pour la suivante : considérons un repère centré en O , milieu de AB , tel que $OB = 1$, et appelons θ l'angle BOH ($\theta \in]-\pi, \pi[$). $HI = HJ = HA = 2 \cos \frac{\theta}{2}$, or les segments OB et HJ (resp. HI) se correspondent dans l'homothétie de centre P (resp. Q) et de rapport $2 \cos \frac{\theta}{2}$, d'où $OP = \frac{1}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{2}}$ et $OQ = \frac{1}{1 - 2 \cos \frac{\theta}{2}}$.

Si, maintenant, l'on fait varier θ de -2π à 2π , on constate que P et Q appartiennent à la même quartique circulaire unicursale, symétrique par rapport à (AB) , d'équation polaire, dans un repère centré en O et d'axe des abscisses OB , avec $OB = 1$:

$$\rho = \frac{1}{1 + 2 \cos \frac{\theta}{2}}$$

ou d'équation cartésienne dans ce repère :

$$4(x^2 + y^2)(x+1)^2 = (x^2 + y^2 - 1)^2.$$

Dans un repère centré en A et d'axe des abscisses AB , avec $AB = 2$, l'équation polaire devient :

$$\rho = \frac{4 \cdot \cos \theta \cdot \cos(2\theta)}{4 \cdot \cos^2 \theta - 1} = \frac{\sin(4\theta)}{\sin(3\theta)}$$

et l'équation cartésienne :

$$(x^2 + y^2)(3x^2 - y^2) - 4x(x^2 - y^2) = 0.$$

Dans ce repère, la courbe peut être paramétrée ainsi :

$$y = ux, \quad x = \frac{4(u^2 - 1)}{(u^2 + 1)(u^2 - 3)}$$

Quelques lecteurs ont précisé que, géométriquement, les points P et Q ne sont pas définis lorsque H est en A ou B , il convient de prolonger par continuité. L'étude des points rationnels de cette quartique a suggéré à Pierre Daniel des travaux dirigés en quatrième et en troisième. Cette quartique admet un point triple en A , deux asymptotes d'équation, dans le repère centré en O où $B = (1, 0)$:

$$y = \pm \sqrt{3} \left(x + \frac{4}{3} \right).$$

Jacques Dautrevaux précise qu'elle recoupe ses asymptotes aux points d'abscisses

$$-1 - \frac{1}{2\sqrt{6}} \quad \text{et} \quad -1 + \frac{1}{2\sqrt{6}},$$

et que les points cycliques ont avec leurs tangentes respectives des contacts d'ordre 4. Marie-Laure Chaillout signale qu'elle recoupe toute droite passant par O en deux couples de points (P,Q) et (P',Q') formant une division harmonique.

C'est d'ailleurs cette notion de « division harmonique » qui suggère à Edgard Delplanche une méthode originale. L'idée est d'étudier d'abord le lieu de M, milieu de PQ. Comme l'ont également remarqué d'autres lecteurs, M décrit une hyperbole : P et Q étant conjugués harmoniques par rapport à O et H, $2/OH = (1/OP) + (1/OQ)$, donc $2 \cdot OP \cdot OQ = OH \cdot (OP + OQ) = 2 \cdot OH \cdot OM$. Or le cercle de diamètre PQ passe par A (puisque l'angle PAQ est droit), et recoupe la droite OA en A', tel que M soit sur la médiatrice de AA'. Et $OP \cdot OQ = OA \cdot OA'$ (puissance de O par rapport à ce cercle), d'où l'on déduit $OM = OA'$ (puisque $OH = OA$). Or OA', c'est deux fois la distance des médiatrices de OA et de AA', soit deux fois la distance de M à la médiatrice (D) de OA : M appartient donc à l'hyperbole d'excentricité 2, de foyer O et de directrice associée (D). L'autre foyer de l'hyperbole est l'intersection des asymptotes de notre quartique (lieu de P et Q).

L'intérêt de cette approche est que la transformation qui associe au point M les deux points P et Q communs à la droite (OM) et au cercle de centre M et de rayon MA peut être considérée en toute généralité. Edgard Delplanche nous rappelle que le cas où M décrit une droite est étudié dans Commissaire et Cagnac : P et Q décrivent une cubique circulaire, courbe cissoïdale d'un cercle. Si M décrit le cercle de diamètre OA, le lieu de P et Q se décompose en deux cercles, et si M décrit une conique de foyer O, de directrice associée (D) et d'excentricité e (généralisation de notre problème), H, conjugué harmonique de O par rapport à P et Q, décrit un cercle de centre O et de rayon $\frac{2}{e}OA$.

Enfin, toutes sortes de lieux géométriques proches de notre problème ont été étudiés. Jacques Dautrevaux remarque que l'inversion de pôle A et de puissance 4 transforme notre quartique en une cubique :

$$x(x^2 - y^2) - (3x^2 - y^2) = 0,$$

cubique unicursale ayant un point double à l'origine A et trois asymptotes concourantes en O. Grâce à Cabri Géomètre, Pierre Daniel a réuni sur une même figure le lieu de I et J qui est le trifolium d'équation polaire par rapport à A :

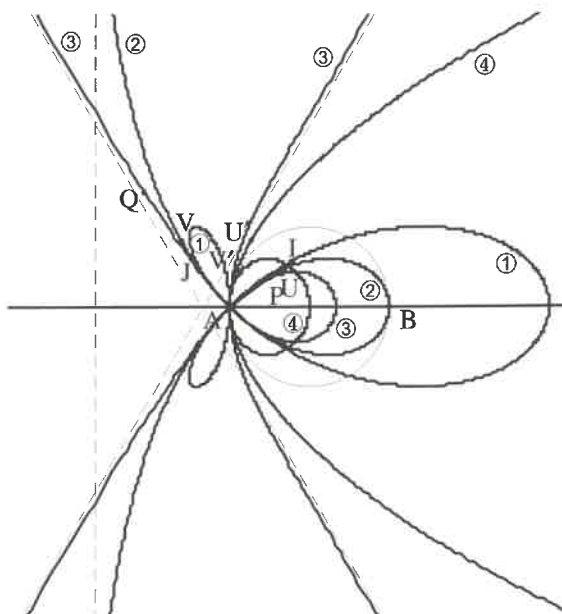
$$\rho = 4 \cdot \cos(2\theta) \cdot \cos\theta,$$

le lieu des points U et V, intersections de BH avec AI et AJ, qui décrivent une strophoïde droite :

$$\rho = \frac{2 \cos(2\theta)}{\cos \theta},$$

et des points U' et V' , intersections de AH avec BI et BJ , qui a pour équation :

$$\rho = \frac{2 \cos \theta}{1 - \cos \theta}.$$



- ① Lieu des points I et J.
- ② Lieu des points U et V.
- ③ Lieu des points P et Q.
- ④ Lieu des points U' et V' .

OLYMPIADES MATHÉMATIQUES BELGES (1994-1998). TOME 4

Une production de la SBPMef : cf. Bulletin 430, p. 698 et page 784.

Trois séries : Mini, Midi, Maxi. 230 pages en A5. Tableaux, niveaux de difficulté, ... Une source de recherches attrayantes...

Prix : 37 FF l'exemplaire jusqu'à 4 exemplaires, 34 FF de 5 à 9, etc.

Port : 13 FF pour un exemplaire ; 24 FF pour 2 ou 3 ; 40 FF pour 4, 5 ou 6 ; 59 FF pour 7, 8 ou 9, ...

TOME 4 + TOME 3 (1988-1993, Mini et Maxi) : Prix (depuis octobre) : 57 FF + 17 FF de port.