Avis de recherche

Vous pouvez utiliser cette rubrique pour poser des questions de tout ordre : demande d'une démonstration, d'une référence, de résolution d'un problème, d'éclaircissement d'un point historique, etc.
Veuillez envoyer vos questions et réponses, avec une feuille par sujet et votre nom sur chacune, et, si possible, le texte sur disquette (avec enveloppe affranchie si vous souhaitez son retour) à :

Robert FERRÉOL
6, rue des annelets
75019 PARIS.

par Internet : rferreol@club-internet.fr

Ancien avis de recherche

Avis de recherche n° 120.

Le nombre entier $u_n = \dfrac{\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n}{2}$ peut-il être un carré ?

Nouvelle réponse de Jacques Bouteloup (Rouen)

On vérifie aisément la relation de récurrence $u_n = 4\,u_{n-1} - u_{n-2}$, puis on démontre par récurrence :
1) que u_n n'est jamais multiple de 3 (u_n est congru à $(-1)^n$ modulo 3).
2) que, modulo 10, on a, pour n congru à k modulo 6 ($0 \le k \le 5$), les congruences successives : 1, 2, 6, 7, 2. Seuls 1 et 6 conviennent pour des carrés. Donc u_n ne peut être un carré que si n est multiple de 3.

On calcule aisément : $u_n^3 = \dfrac{u_{3n}}{4} + 3\dfrac{u_n}{4}$, d'où la relation : $u_{3n} = u_n\left(4u_n^2 - 3\right)$ (cas particulier du polynôme de Tchebycheff donnant u_{kn} en fonction de u_n). Les deux facteurs du deuxième membre sont premiers entre eux (un facteur commun devant diviser u_n et 3). Si u_{3n} est un carré, ce sont des carrés, d'où : $4u_n^2 - 3 = x^2$, donc $\left(2u_n + x\right)\left(2u_n - x\right) = 3$, $u_n = x = 1$ et $n = 0$. Il n'existe pas d'autre carré que $u_0 = 1$.

Autres contributions de Pierre Barnouin, Pierre Kaplan (Nancy), Michel Lafond (Dijon) et Jean Moreau de Saint Martin.