Triangles isométriques et configurations

Bernard Destainville(*)

Les nouveaux programmes de Seconde proposent l'observation de « triangles isométriques directement ou non », et le schéma directeur de la proposition de programme du GTD pour les classes de Première S et TS privilégie notamment l'action de transformer. Les isométries « seront utilisées dans les problèmes » dans la série scientifique.

La justification de l'isométrie de deux sous-figures dépend du contexte :
– Elle peut provenir de la reconnaissance immédiate, dans la figure, d'une configuration familière ; par exemple lorsque deux carrés ou deux triangles équilatéraux ont même côté.
– Dans d'autres cas on pourra utiliser un des trois « cas d'égalité ».
– La justification peut aussi provenir de la reconnaissance d'une transformation ; par exemple une translation parce qu'on a remarqué des parallélogrammes convenablement disposés, ou une symétrie axiale parce qu'une partie de la figure admet un axe.

Dans les deux premières situations ci-dessus, la caractérisation de la transformation qui met les sous-figures en correspondance n'est pas indispensable, notamment pour repérer les segments et les angles homologues. Cependant la nature de cette isométrie peut être intéressante et même utile, par exemple pour prolonger l'étude à d'autres éléments de la figure ou pour composer avec une autre isométrie.

Dans l'étude qui suit, la caractérisation de l'isométrie qui met deux triangles en correspondance se fait à l'aide de **configurations clés** : on peut d'abord considérer la configuration formée par deux couples de sommets homologues, puis compléter la caractérisation à l'aide du troisième couple. Les études préliminaires des paragraphes 1, 2 et 3 mettent en place les configurations utiles à la recherche.

Ensuite au paragraphe 4, nous dégageons un **algorithme de caractérisation**, en commençant par les situations les plus simples.

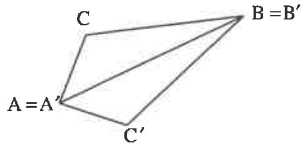
Dans l'optique d'une meilleure maîtrise pour les problèmes, il est ainsi possible de proposer en série scientifique un procédé de **recherche systématique de la nature d'une isométrie à l'aide de configurations**.

Au cours de ces réflexions nous appellerons en général A, B et C les sommets du premier triangle, A′, B′ et C′ les sommets homologues du second.

(*) IREM de Toulouse

1) Le cerf-volant, configuration fondamentale

Certains auteurs disent « cerf-volant isocèle ».



Si deux triangles ABC et A′B′C′ sont isométriques et tels que A = A′ et B = B′, alors ou bien C′ = C, ou bien C′ est le symétrique de C par rapport à (AB).

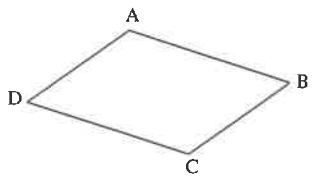
Démonstration : A, B et C étant fixés, le point C′ appartient au cercle de centre A et de rayon AC et au cercle de centre B et de rayon BC. Ces cercles sont sécants en C et en un second point C′ symétrique de C par rapport à la droite (AB) ; dans l'hypothèse où A, B et C ne sont pas alignés, ces deux points sont distincts.

Conclusion pour l'isométrie : lorsqu'il y a deux points invariants A et B, l'isométrie est soit l'application identique, soit la symétrie d'axe (AB).

2) D'autres configurations

a) Le parallélogramme

Les propositions suivantes sont équivalentes :



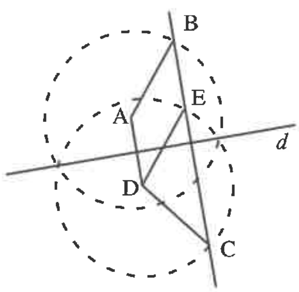
- Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$.
- $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{CB}$.
- Les segments [AC] et [BD] ont le même milieu.

b) Le trapèze isocèle

Nous adopterons la définition de Henri Bareil et Christiane Zehren (Mathémathiques Sixième, Hachette, 1986) où le trapèze isocèle est défini comme *un trapèze dont les bases ont la même médiatrice*. En fait, les avis sont partagés : voir les Bulletins APMEP n° 419 (article de Marie-Jeanne Perrin-Glorian) et n° 422 (article de Nadine Gérald) .

Soit un trapèze ABCD de bases [AD] et [BC] .

Définition : il est équivalent de dire que le trapèze ABCD est isocèle ou que les segments [AD] et [BC] ont la même médiatrice.

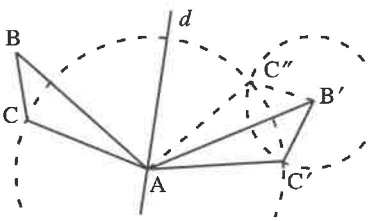


Par contre, il n'est pas équivalent de dire que AB = DC, car la réciproque est fausse : en effet, dans le trapèze ABCD de bases [AD] et [BC], soit *d* la médiatrice de [AD] ; le point C tel que DC = AB appartient à la fois au cercle (C) de centre D et de rayon AB et à la droite (BC) ; ces cercles sont sécants en au plus deux points, le point C et un autre point E ; or, dans la symétrie d'axe *d*, la droite (BC) est globalement invariante et le cercle de centre A et de rayon AB a pour transformé le cercle (C) de centre D et de rayon AB ; un des deux points C ou E est donc l'image de B, c'est-à-dire le symétrique de B par rapport à *d* ;

mais lorsque C et E sont distincts, le second point (E sur la figure) n'est pas le symétrique de B par rapport à *d*, car, dans une symétrie, l'image de chaque point est unique. Ainsi le trapèze n'est pas nécessairement isocèle. En fait, ABED est un parallélogramme.

c) Deux triangles isométriques avec un couple de sommets homologues confondus

Énoncé : Deux triangles ABC et AB′C′ sont isométriques et les angles $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AC'}\right)$ sont de sens contraires. Démontrer que les segments [BB′] et [CC′] ont la même médiatrice.



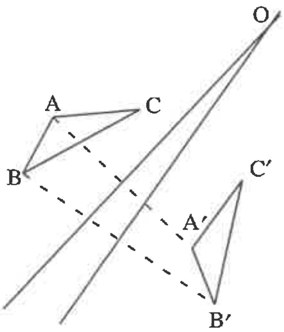
Démonstration : Soit *d* la médiatrice de [BB′]. Dans la symétrie d'axe *d*, l'image de C est l'un des deux points C″ ou C′ communs au cercle de centre A et de rayon AC et au cercle de centre B′ et de rayon BC.

Comme au paragraphe 1, nous obtenons ainsi deux triangles AB′C″ ou AB′C′ symétriques par rapport à (A′B′), et l'un des deux est directement isométrique à ABC, l'autre non. Or les angles $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{AC'}\right)$ sont de sens contraires par hypothèse ; c'est donc que A B′C′ est le triangle symétrique de ABC par rapport à la droite *d* ; ainsi B′ et C′ sont respectivement symétriques de B et C par rapport à *d* ; les segments [BB′] et [CC′] ont donc la même médiatrice, et par suite le quadrilatère BCC′B′ est un trapèze isocèle.

Plus généralement, conclusion pour l'isométrie : si les triangles ABC et AB′C′ sont isométriques, alors
– ou bien, lorsque l'isométrie est indirecte, C′ est l'image de C par la symétrie par rapport à la médiatrice *d* de [BB′] ,
– ou bien, lorsque l'isométrie est directe, C′ est l'image de C par la rotation de centre A qui transforme B en B′ ; cette rotation est la composée de la symétrie d'axe *d* suivie de la symétrie d'axe (AB′).

3) Problème(1)

Énoncé : les triangles ABC et A′B′C′ sont directement isométriques et les droites (AB) et (A′B′) ne sont pas parallèles. Démontrer que l'isométrie qui fait correspondre ces deux triangles est une rotation.



Démonstration :

a) *les médiatrices des segments* [AA′] et [BB′] *sont sécantes* : en effet, elles ne sont ni confondues, ni parallèles car les droites (AA′) et (BB′) ne sont pas parallèles.

(1) pour préparer les deux derniers cas de la p. 829.

Soit O le point d'intersection de ces médiatrices.

b) Les angles $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}\right)$ sont égaux :

Par hypothèse, OA = OA′, OB = OB′ et AB = A′B′ ; donc les triangles OAB et OA'B' sont isométriques, et par suite les angles orientés $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}\right)$ sont soit égaux, soit opposés.

Si $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}\right)$ étaient opposés, d'après le résultat du paragraphe 2c appliqué aux triangles OAB et OA′B′, on aurait (AA′) // (BB′), ce qui est contraire à l'hypothèse ; donc $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right) = \left(\overrightarrow{OA'},\overrightarrow{OB'}\right)$; ainsi, il existe une rotation r de centre O telle que r(A) = A′ et r(B) = B′.

c) r(C) = C′ : d'après le paragraphe 1, l'image de C est soit C′, soit C″ symétrique de C′ par rapport à (A′B′) ; or ABC et A′B′C′ sont directement isométriques, donc nécessairement r(C) = C′.

Conclusion pour l'isométrie **I** transformant un triangle ABC en un triangle A′B′C′ tel que les droites (AB) et (A′B′) ne soient pas parallèles :
– ou bien, lorsque l'isométrie **I** est positive, C′ est l'image de C par une rotation r dont le centre est l'intersection des médiatrices des segments [AA′] et [BB′],
– ou bien, lorsque l'isométrie **I** est négative, C′ est l'image de C par la composée de cette rotation r suivie de la symétrie s d'axe (A′B′).

Nous pouvons décomposer la rotation r en deux symétries axiales s' et s'' avec l'axe de s' parallèle à (A′B′) ; soit t la translation composée de s' suivie de s (les axes sont parallèles) ; alors

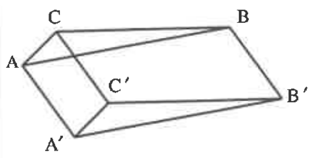
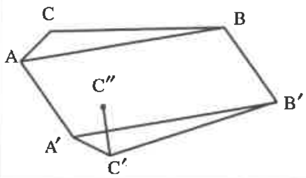
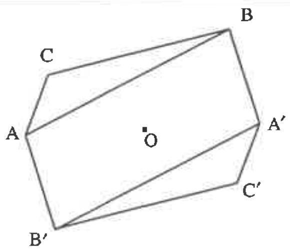
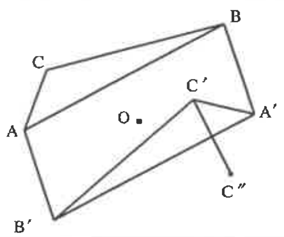
$$\mathbf{I} = s \circ r = s \circ (s' \circ s'') = (s \circ s') \circ s'' = t \circ s'' \,;$$

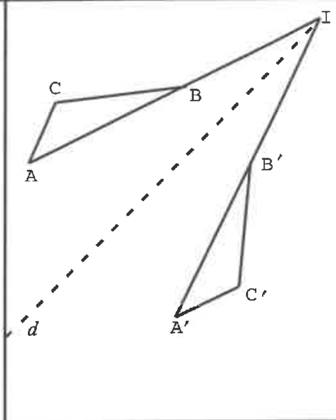
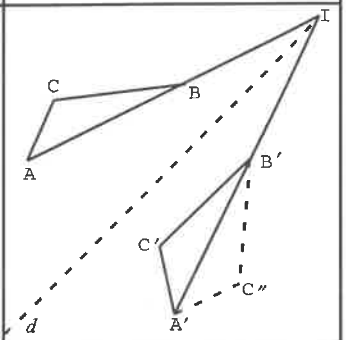
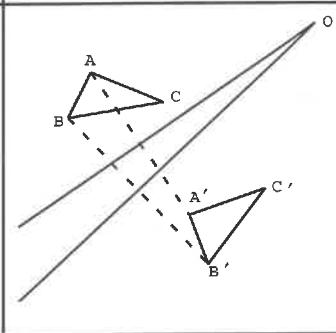
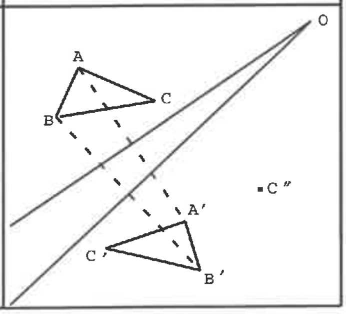
ainsi l'isométrie **I** est une symétrie glissée.

4) Une recherche méthodique de la nature de l'isométrie I qui fait correspondre les triangles ABC et A′B′C′ , avec A ≠ A′, B ≠ B′ et C ≠ C′

Le résultat du paragraphe 1 permet d'associer les figures possibles par paires. En effet, après avoir prouvé que ABC et A′B′C′ sont isométriques (nouveau programme de Seconde) et avoir étudié la configuration formée par les quatre points A, B, A′ et B′, il existe deux possibilités (et deux seulement) qui font correspondre C′ à C. Et chacune des deux isométries ainsi caractérisées se déduit de l'autre en la composant par la symétrie d'axe (A′B′). L'une des deux est donc directe et l'autre non (c'est-à-dire : l'une est positive et l'autre négative).

Dans le tri binaire qui suit, nous avons supposé *a priori* l'existence d'une isométrie dans chaque cas de figure ; l'étude prouve que l'hypothèse était correcte.

algorithme	des indications	configurations
si (AB) // (A′B′) , **alors** *si* ABB′A′ est un parallélogramme *alors* *si* ACC′A′ est un parallélogramme *alors* I est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$	utiliser des vecteurs égaux	
sinon I est une symétrie glissée	utiliser la symétrie d'axe (A'B')	
sinon nécessairement, ABA′B′ est un parallélogramme ; *si* ACA′C′ est un parallélogramme de centre O *alors* I est la symétrie de centre O	utiliser des vecteurs opposés	
sinon I est une symétrie glissée	en décomposant la symétrie de centre O avec un des deux axes de symétrie parallèle à (A′B′)	

suite de l'algorithme	des indications	configurations
sinon soient d et d' les médiatrices de [AA'] et [BB'] *si* ABB'A' est un trapèze isocèle ***alors*** *si* $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)$ n'ont pas le même sens *alors* **I** est la symétrie d'axe d	le point symétrique de C s'identifie avec C'	
sinon avec I intersection de (AB) et (A'B'), **I** est une rotation de centre I	c'est la composée des symétries d'axes d et (A'B')	
sinon soit O l'intersection de d et d' *si* $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ et $\left(\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}\right)$ ont le même sens *alors* **I** est une rotation de centre O	soit R la rotation de centre O telle que R(A) = A', nécessairement R(B) = B' et R(C) = C' (voir § 3)	
sinon **I** est une symétrie glissée	en décomposant la rotation ci-dessus avec un des axes de réflexion parallèle à (A'B')	

Notes :

• Envisageons un nouveau couple (M,M′) de points homologues par l'isométrie. Les points A′, B′ et C′ ne sont pas alignés, donc les cercles (A′,AM) , (B′,BM) et (C′,CM) ont un point commun unique qui est M′ ; le nouveau couple (M,M′) ne modifie pas la discussion. Ainsi la donnée de deux triplets non alignés (A,B,C) et (A′,B′,C′) caractérise l'isométrie qui fait correspondre deux figures isométriques plus complexes.

• Un collègue de la Commission Inter-Irems de géométrie a fait remarquer avec raison qu'il reste à voir ce qui se passerait si l'étude était partie de l'analyse des couples (A,C) et (A′,C′), par exemple. Seuls les cas 1, 3 et 5 de l'algorithme précédent restent inchangés ; pour les autres cas, qui sont deux rotations et trois symétries glissées, il semble peu probable qu'il n'y ait pas d'interférences entre eux, suivant la nature de la configuration formée par les deux triangles isométriques ABC et A′B′C′.

Charles PÉROL

1920-2000

Notre collègue Charles Pérol est décédé accidentellement le 18 octobre.

Fondateur de l'IREM de Clermont en 1970, il le dirige jusqu'en 1976, tout en participant au bureau de l'APMEP et à la commission Lichnerowicz, et l'enracine profondément pour résister aux tempêtes en créant entre les enseignants des divers établissements de l'académie un réseau de relations confiantes et fécondes qui subsiste encore.

Il anime des recherches nationales sur l'enseignement de la géométrie, tant dans un groupe inter-IREM (OPC), que dans une commission "problématiques au collège" de l'APMEP et en bon descendant d'une famille de tailleur de pierre, invente et perfectionne une machine pour découper avec précision des polyèdres en polystyrène.

La veille de sa mort, il présentait encore la démonstration d'Euclide du théorème de Pythagore à des élèves du lycée de St-Flour où il avait débuté.

Très nombreux et très émus étaient ses amis, ses collègues, ses anciens élèves venus entourer sa famille pour lui dire un dernier adieu.

P.L.Hennequin