

## Enseigner la géométrie avec un ordinateur ?

Roger Cuppens

Ceux qui me connaissent doivent penser que la réponse est évidemment positive. Elle est néanmoins subordonnée à la question suivante « Faut-il (encore) enseigner la géométrie ? ». Même si de nombreux arguments ont été développés dans le Rapport d'étape de la Commission Kahane, je me permets d'ajouter quelques remarques. Puis je montrerai divers apports possibles des ordinateurs à un enseignement rénové de la géométrie.

### Faut-il (encore) enseigner la géométrie ?

L'enseignement de la géométrie (comme d'ailleurs de toute autre branche des mathématiques) suppose que cette discipline présente soit une utilité indéniable, soit un grand intérêt culturel.

Rappelons que la géométrie est (sans doute) née chez les peuples du Moyen-Orient (à une époque où cette notion géographique n'avait évidemment aucun sens) de problèmes pratiques tels que les problèmes de mesure (longueur, aire, ...) et d'astronomie. Elle est devenue dans les mains des grecs le prototype des sciences hypothético-déductives. Une autre source d'intérêt est apparue à la Renaissance avec les travaux autour de la perspective et d'autres applications telles que la taille des pierres ou la confection de gnomons. Or il faut reconnaître que la part consacrée à ces matières est faible, voire presque nulle. On comprend alors la phrase que m'a fournie un jour un compagnon tailleur de pierres lors d'un débat sur l'utilité des mathématiques : « De la géométrie, j'en utilise tous les jours, mais ce n'est pas celle que j'ai apprise à l'école ».

L'intérêt culturel de l'enseignement de la géométrie avant la réforme des mathématiques modernes était évident puisqu'effectivement l'on avait le premier exemple d'une démarche scientifique : partant de certains faits expérimentaux sur la notion de figure, on introduisait des axiomes, d'où l'on déduisait (par de vraies démonstrations) une théorie<sup>(1)</sup>. Oh !, bien sûr, il y aurait eu beaucoup de choses à revoir, par exemple la place des cas d'égalité dont la « démonstration » faisait appel aux mouvements, principe refusé aux élèves immédiatement après, mais il aurait suffi d'admettre ces résultats comme axiomes, les démonstrations proposées devenant des justifications pour avoir une théorie cohérente. Par contre, l'apprentissage de la démonstration comme la recherche dans la figure de celui des cas d'égalité qui donne le résultat souhaité était plutôt satisfaisant : mieux vaut dans

(1) Même si l'on était obligé d'admettre certains faits sur la figure, un système complet d'axiomes étant beaucoup trop compliqué.

un apprentissage avoir un petit nombre d'outils à sa disposition, même si le professionnel en connaît beaucoup d'autres. Une autre critique que l'on pouvait faire était qu'une fois les résultats établis, il n'y avait aucun retour sur les faits expérimentaux ; or l'une des caractéristiques de la géométrie est de travailler dans un monde idéal où les résultats sont exacts : par exemple, le théorème de Pythagore permet d'affirmer que si l'on a un triangle de côtés 3, 4 et 5, ce triangle est rectangle. Or si on mesure (par exemple avec une corde à nœuds) les longueurs d'un triangle et que l'on trouve (presque) 3, 4, et 5, peut-on affirmer que l'on a un angle (presque) droit ? Ceci voudrait dire que le théorème de Pythagore est « stable ». Mais démontre-t-on (ou en tout cas fait-on remarquer) cette stabilité ? Ce fait est pourtant essentiel pour les applications<sup>(2)</sup> !

Puis vint la réforme des « mathématiques modernes ». Au cri de « À bas Euclide, vive Cantor », on allait voir ce que l'on allait voir... et l'on a vu : des droites que même un mathématicien ne reconnaissait pas, des cosinus définis comme éléments de matrices, etc. Il peut être important de rectifier des erreurs qui se répandent actuellement. Ce n'est pas par manque de moyens que cette réforme a échoué : il y a eu des stages de formation « lourds », des émissions à la télévision, etc. Non, c'est parce qu'elle n'était pas adaptée à la population à enseigner : on ne peut pas partir des concepts généraux ! Faire des mathématiques nécessite que les objets manipulés aient du sens, ce qui était loin d'être le cas<sup>(3)</sup> ! Ce qui devrait rester de cette expérience est le fait qu'une réforme doit être expérimentée avant d'être étendue à l'ensemble d'une population : l'exemple récent de la réforme des statistiques (lui accolera-t-on un jour l'épithète « modernes » ?) prouve que la leçon ne semble toujours pas retenue.

On avait tellement entendu crier « À bas Euclide » qu'un retour en arrière était impossible. Puisque l'on refusait de revenir aux cas d'égalité des triangles, on a voulu les remplacer par la notion de transformation. Or, ici aussi, cette notion ne peut guère avoir de sens avant longtemps : ce n'est pas parce que l'on met en évidence dans certaines figures un axe ou un centre de symétrie que l'on a réellement compris la notion de symétrie. Quant à vouloir bâtir un curriculum autour du programme d'Erlangen, ceci me semble une hérésie : rappelons que le travail de Klein venait à la fin d'un siècle où l'on avait trouvé<sup>(4)</sup> de nombreuses nouvelles géométries : non euclidiennes, projective, anallagmatique... Le besoin de classer et de comparer ces géométries se faisait alors sentir. Combien de ces géométries sont connues d'un élève normal en fin de lycée<sup>(5)</sup> ?

(2) Et sans doute pour comprendre le lien entre le monde idéal des figures géométriques et le monde réel.

(3) Lorsque j'ai préparé l'Agrégation, un de mes enseignants m'a appris que lorsque l'on introduit une notion abstraite telle que celle de groupe, il faut pouvoir fournir immédiatement plusieurs exemples et contre-exemples significatifs...

(4) Souvent, dans l'idée des découvreurs, comme un outil pour renforcer les méthodes d'Euclide, comme le montre par exemple la lecture des travaux de Poncelet ou de Chasles.

(5) En arrivera-t-on à demander qu'un concept (ou un résultat) de géométrie affine soit étudié dans le cadre de cette géométrie ?

Oui, il faut continuer à enseigner la géométrie car les notions géométriques de droite, plan, cercle, angle, etc., les problèmes de mesure et de représentation des objets de l'espace doivent faire partie de la culture de base. Mais pour ceci, il faut revenir à un enseignement où la notion de base est celle de figure, les transformations en tant qu'objets géométriques ne se dégageant que beaucoup plus tard...

### Ce que peut apporter l'ordinateur

Dans un tel enseignement, l'ordinateur<sup>(6)</sup> peut évidemment s'avérer utile, voire indispensable. Nous en donnons ici quelques exemples en géométrie plane<sup>(7)</sup>.

À l'école maternelle, des jouets comme les tortues Logo permettent d'aborder les notions de déplacement, de longueur ou d'angle<sup>(8)</sup>.

Dès l'école primaire, les possibilités de déplacer les dessins obtenus permettent des réflexions utiles : par exemple, il y a dans Cabri une grande différence de statut entre un rectangle obtenu « à vue de nez », en utilisant une grille ou en utilisant l'outil « Droite perpendiculaire ».

De même, les activités autour de la symétrie d'une figure peuvent prendre une autre dimension comme l'a montré [Drevet].

Au début du collège, l'une des difficultés principales consiste à passer de la géométrie « expérimentale » du primaire à un monde idéal de figures dont les dessins ne fournissent qu'une idée grossière, mais oh combien utile ! L'utilisation d'un ordinateur peut jouer ici un rôle essentiel comme l'ont montré les travaux de l'équipe de C. Laborde (cf. [Grenoble]).

De plus, on peut utiliser le mouvement pour justifier l'introduction des résultats admis (voir, en Annexe, une activité possible sur les cas d'égalité des triangles) ou de nouvelles notions telles que bissectrice ([Cuppens b], p. 217) ou orthocentre ([Bergue]). En particulier, seule l'utilisation d'un logiciel permettrait l'introduction dès le collège de la notion de tangente à un cercle comme position limite d'une sécante ([Cuppens b], p. 221).

La possibilité d'obtenir automatiquement les lieux géométriques permet d'échapper très vite à l'« axiome de Saint Cyr » suivant lequel tous les lieux sont des droites ou des cercles : par exemple, nous avons montré dans [Cuppens f] qu'il suffit de connaître les propriétés de la médiatrice pour étudier l'ellipse du jardinier.

On peut aussi étudier des problèmes ouverts tels que les diagonales du pentagone [Carral] ou le problème du buteur au rugby (cf. [Cuppens b], p. 226). On a alors un

(6) Dans la suite, le terme ordinateur désignera aussi bien un ordinateur qu'une calculatrice programmable offrant un logiciel de géométrie.

(7) Pour la géométrie dans l'espace, on pourra consulter [Martin] ou [Rousselet a] et [Rousselet b].

(8) Mais y-a-t-il encore des tortues Logo ou des enseignants connaissant le langage Logo dans les écoles maternelles ou primaires ? Voilà un exemple d'expérimentation à grande échelle dont les résultats sont oubliés. L'introduction de Logo permettrait pourtant une introduction à certaines notions de géométrie ou d'algorithmique, ce qui est au moins aussi intéressant qu'une utilisation forcenée d'Internet.

outil permettant les premières étapes de l'étude d'un problème, le résultat obtenu nécessitant une démonstration parfois suggérée par le logiciel.

Au lycée, l'étude abstraite des transformations peut être abondamment illustrée : par exemple, on verra en Annexe 1 comment « voir » qu'un déplacement est le produit d'une translation et d'une rotation ou le produit de deux symétries axiales. On peut aussi étudier des transformations qui « transforment vraiment » comme l'affinité, la symétrie oblique ou l'inversion, mais aussi l'homologie qui permet une étude plane des coniques analogue à celle de La Hire [Cuppens d]. L'utilisation des transformations comme « boîtes noires » ([Bouteiller], [Sédima]) permet de « mener l'enquête » sur une transformation donnée, ce qui est une manière ludique d'étudier les propriétés caractéristiques d'une transformation.

L'introduction de la géométrie analytique peut être préparée et rendue vivante par l'introduction des axes<sup>(9)</sup> et l'utilisation des outils puissants d'un logiciel de géométrie tel que Cabri. On établit ainsi un lien entre la géométrie et l'analyse qui n'est pas toujours évident dans les programmes actuels (voir en Annexe 2 un tel exemple).

Signalons en outre qu'un logiciel montrant des fractals<sup>(10)</sup> (cf. [Cuppens a]) permet de comprendre certains phénomènes difficiles à concevoir sans un logiciel : par exemple, le flocon de neige de Von Koch permet de concevoir l'existence de fonctions continues non dérivables tandis que la courbe de Peano fournit un exemple de courbes recouvrant un carré.

De même, l'utilisation de certaines fonctionnalités nouvelles du logiciel Cabri II permettrait d'introduire un lien entre géométrie et probabilités (cf. Annexe 3), ce qui serait peut être plus intéressant comme introduction aux probabilités que de faire jeter des dés à des élèves de seconde, surtout si ceci permet d'évoquer le problème de comment un ordinateur peut « simuler » le hasard.

Enfin, l'emploi de logiciels de géométrie à l'université permettrait de renouveler l'enseignement de la géométrie en introduisant de manière intuitive la géométrie projective et l'étude des courbes (cf. [Cuppens d]). De même, l'étude du modèle de Poincaré réalisé dans Cabri II (cf. [Laborde]) permettrait une introduction aux géométries non euclidiennes et par là même aux fondements de la géométrie. Un tel enseignement ferait le lien entre la géométrie du secondaire et des études ultérieures plus abstraites et fournirait une bonne formation pour les futurs enseignants.

## Conclusion

On voit que les ordinateurs peuvent être très utiles pour enseigner la géométrie à condition que cet enseignement tienne compte dès le départ d'un tel emploi. Il faut en effet se rappeler (cf. [Cuppens c]) que l'emploi des ordinateurs suppose une conception euclidienne des objets manipulés (un point est sur une droite ou un cercle, mais, pour un ordinateur comme pour Euclide, une droite n'est pas un ensemble de

(9) Le fait de ne pas avoir à « faire » les calculs permet rapidement l'utilisation d'axes obliques.

(10) Les fractals semblent les grands oubliés du rapport d'étape de la Commission Kahane.

points). L'emploi des ordinateurs dans un enseignement n'en tenant pas compte (au moins au début) risque de créer des conflits didactiques pouvant être facilement évités. Il va sans dire qu'un nouvel enseignement de géométrie devra être précédé d'une réelle formation des enseignants, formation encore plus indispensable si on généralise l'utilisation des calculatrices.

### Bibliographie

- [Bergue] D. Bergue. *Une utilisation du logiciel « Géomètre » en 5ème*. Dans « Apports de l'outil informatique à l'enseignement de la géométrie. Commission Inter-IREM Mathématiques et Informatique, 1994, p. 35-42.
- [Bouteiller] Y. Bouteiller et M. Dupérier. *Apprendre et pratiquer la géométrie avec l'ordinateur*. IREM d'Orléans, 1993.
- [Carral] M. Carral et R. Cuppens. *Les tribulations d'un pentagone*. Repères-IREM n° 12 (juillet 1993) p. 51-73.
- [Cuppens a] R. Cuppens. *La récursivité en géométrie : les fractals*. IREM de Toulouse, Brochure n° 106, 1986.
- [Cuppens b] R. Cuppens. *Faire de la Géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre* (deux tomes). Brochures APMEP n°s 104 et 105, 1996.
- [Cuppens c] R. Cuppens. *De Cabri-Géomètre I à Cabri-Géomètre II : quelques problèmes épistémologiques et didactiques*. Université d'été « Cabri-Géomètre » de l'ordinateur à la calculatrice. De nouveaux outils pour l'enseignement de la géométrie. Grenoble 8-12 juillet 1996. p. 189-202.
- [Cuppens d] R. Cuppens. *Faire de la Géométrie Supérieure en jouant avec Cabri-Géomètre II* (deux tomes). Brochures APMEP n°s 124 et 125, 1999.
- [Cuppens e] R. Cuppens. *Voir avec Cabri II les points cycliques et les droites isotropes*. Bulletin de l'APMEP n° 428 (Journées Nationales de Gérardmer 1999) p. 321-323.
- [Cuppens f] R. Cuppens. *Mathématiques et informatique*. Bulletin de l'APMEP n° 429 (mai-juin 2000), p. 460-468.
- [Drevet] G. Drevet & J.-F. Canet. *Trois séances au primaire*. AbraCadabri n° 9 (mai-juin 1995) p. 2-5.
- [Grenoble] *Cabri-classe. Apprendre la géométrie avec un logiciel*. Éditions Archimède, 1994.
- [Laborde] J.-M. Laborde. *Explorations en géométries non euclidiennes*. Université d'été « Cabri-Géomètre » de l'ordinateur à la calculatrice. De nouveaux outils pour l'enseignement de la géométrie. Grenoble 8-12 juillet 1996. p. 105-125.
- [Martin] Y. Martin. *Expérimenter en mathématiques avec Cabri-Géomètre*. Éditions Archimède, 1994.
- [Rousselet a] M. Rousselet. *Dessiner l'espace ou Comment employer Cabri-Géomètre en géométrie dans l'espace*. Éditions Archimède, 1995.

[Rousselet b] M. Rousselet. *Étude comparative de Géospace et de Cabri-Géomètre*. Bulletin de l'APMEP n° 423 (septembre-octobre 1999) p. 433-436.

[Sédima] *Hercule Poirot se sert de Cabri-Géomètre pour deviner des transformations du plan*. Sédima, U.C.L., Louvain-la-Neuve, 1994.

## Annexe 1

### Les cas d'égalité<sup>(11)</sup> des triangles vu par Cabri

Pour illustrer avec Cabri le premier cas d'égalité des triangles, on prend un triangle ABC, un point B' et un point C' sur le cercle de centre B' et de rayon BC (qui peut s'obtenir avec l'outil « Compas »).

Puis avec la macro « ReportAngle »<sup>(12)</sup>, on trace la demi-droite u' (resp. v') d'origine B' (resp. C') qui fait avec la demi-droite [B'C'] (resp. [C'B']) un angle égal à l'angle fait par les demi-droites [BC] et [BA] (resp. [CB] et [CA]). Si A' est le point d'intersection des demi-droites u' et v', les triangles ABC et A'B'C' vérifient les conditions :  $BC = B'C'$ ,

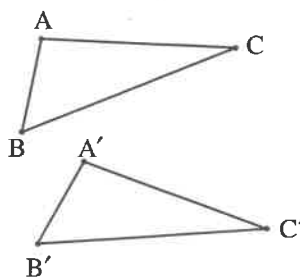
$$\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'A'}\right),$$

$$\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}\right) = \left(\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'A'}\right).$$

On peut alors vérifier que l'on a aussi les conditions :  $AB = A'B'$ ,  $AC = A'C'$  et

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right).$$

BC = 2,886173937932362 cm  
B'C' = 2,886173937932363 cm  
B = 56,523721703897337 °  
B' = 56,523721703897287 °  
C = 24,271046231349686 °  
C' = 24,271046231349686 °



AB = 1,201850425154663 cm  
A'B' = 1,201850425154663 cm  
AC = 2,438806629845379 cm  
A'C' = 2,438806629845380 cm  
A = 99,205232064752977 °  
A' = 99,205232064753005 °

(11) Malgré tous les oukases, le mot égalité me semble adapté à condition de reprendre la définition : « deux objets sont égaux s'ils sont superposables ». En tout cas, il est bien préférable à « isométriques » qui signifie étymologiquement « de même mesure » : que penser de la phrase « deux segments de même longueur sont isométriques » qui est un pléonasme parfait alors que la phrase « deux segments de même longueur sont égaux » est une vérité qui apporte une information supplémentaire. De plus, toute égalité est en réalité une relation d'équivalence : finira-t-on par dire, par souci de purisme, que les expressions « 1 + 1 » et « 2 » sont équivalables ?

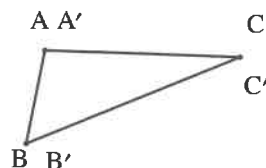
(12) Cf. [Cuppens b], p. 79. Quelques puristes objecteront que cette macro est construite en utilisant les résultats que l'on va présenter, mais cette objection n'est pas valable : dans le monde papier-crayon, on utilise des outils tels que la droite, le décimètre ou le rapporteur sans se préoccuper de la manière dont ils ont été obtenus.

Si on fait coïncider le point  $B'$  avec le point  $B$ , puis le point  $C'$  avec le point  $C$ , on constate que le point  $A'$  coïncide alors avec le point  $A$  (ce que l'on vérifie en demandant la distance des points  $A$  et  $A'$ ).

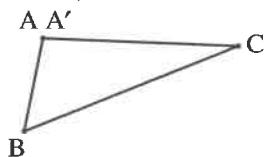
Ces coïncidences peuvent se faire de trois manières (au moins) :

1) en déplaçant « à vue de nez » le point  $B'$ , puis le point  $C'$  : dans ce cas, il est très difficile d'obtenir une coïncidence parfaite<sup>(13)</sup>, mais quand même suffisante pour justifier l'introduction du premier cas d'égalité comme axiome et montrer qu'un déplacement dans le plan est en général le produit d'une translation par une rotation.

$BB' = 0,0000000000000000$  cm  
 $CC' = 0,005631536777072$  cm  
 $AA' = 0,002332881381345$  cm



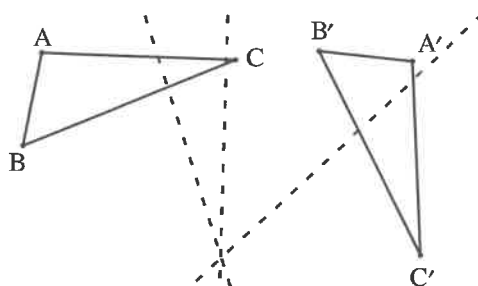
$AA' = 0,0000000000000000$  cm



2) en identifiant le point  $B'$  avec le point  $B$ , puis le point  $C'$  avec le point  $C$  : dans ce cas la coïncidence des points  $A$  et  $A'$  est parfaite, mais l'expérience est beaucoup moins convaincante.

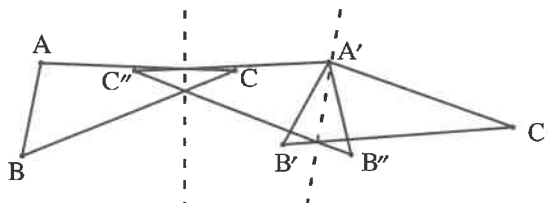
3) lorsque l'on connaît les translations et rotations, en appliquant au triangle  $A'B'C'$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{B'B}$ , puis la rotation de centre  $B$  et d'angle  $(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BA})$ , ce qui montre (ou rappelle) qu'un déplacement (direct) quelconque dans le plan est le produit d'une translation et d'une rotation.

En revenant à la position initiale, on peut vérifier que les médiatrices des segments  $[AA']$ ,  $[BB']$  et  $[CC']$  sont concourantes en un point  $O$  ou parallèles. On constate que le triangle  $A'B'C'$  coïncide, dans le premier cas, avec le transformé du triangle  $ABC$  dans la rotation de centre  $O$  qui amène  $A$  en  $A'$  et, dans le second cas, avec le transformé du triangle  $ABC$  dans la



translation de vecteur  $\overrightarrow{AA'}$ . Un déplacement dans le plan est donc toujours une rotation ou une translation.

On peut aussi appliquer au triangle  $ABC$  la symétrie d'axe  $(AA')$ , ce qui donne un triangle  $A'B''C''$ . On peut alors vérifier que les médiatrices des



(13) De telles expériences sont intéressantes car elles montrent qu'il faut souvent interpréter les expériences faites avec de tels logiciels et démontrer (ou ici admettre) les conjectures faites.

segments  $[B'B'']$  et  $[C'C'']$  coïncident, ce qui « montre » qu'un déplacement dans le plan est le produit de deux symétries axiales.

Il est évident que l'on peut faire des expériences analogues avec les deux autres cas d'égalité : avec le troisième, une construction évidente donne deux triangles symétriques par rapport à la droite  $(B'C')$ .

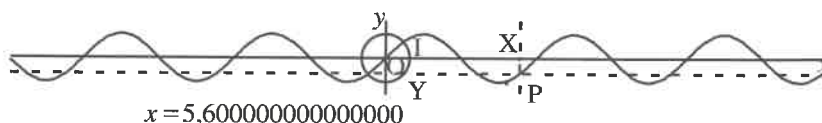
## Annexe 2

### Faire de l'analyse avec Cabri II

Dans [Cuppens b], p. 299, j'ai indiqué comment on peut avec Cabri I obtenir des tangentes « approchées » à une courbe. Je montre ici, sur l'exemple de la fonction sinus (mais la méthode est générale), comment les outils nouveaux de Cabri II permettent de simplifier et d'étendre cette méthode.

Avec l'outil « Montrer les axes », on obtient le système d'axes de base de Cabri, on nomme  $O$  l'origine et on détermine<sup>(14)</sup> le point  $I$  de coordonnées  $(1,0)$ , puis on trace le cercle  $c$  de centre  $O$  passant par le point  $I$  (cercle trigonométrique).

Puis on prend un point  $X$  sur l'axe  $(OI)$ , avec l'outil « Coord. & Equation », on détermine l'abscisse  $x$  du point  $X$  et, en appliquant l'outil « Report de mesure » à  $x$ ,  $c$  et  $I$ , on obtient un point  $Y$  qui est le transformé du point  $X$  dans l'enroulement de la droite  $(OI)$  sur le cercle  $c$ . Les coordonnées du point  $Y$  sont donc  $\cos x$  et  $\sin x$ . Le lieu du point d'intersection  $P$ <sup>(15)</sup> des droites passant par  $X$  et  $Y$  et perpendiculaires respectivement au premier et au deuxième axe est donc la courbe représentative  $\gamma$  de la fonction sinus.



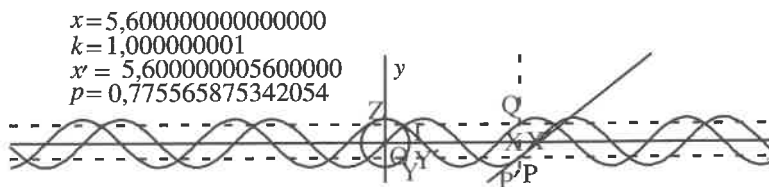
En utilisant l'outil « Calculatrice », on peut multiplier  $x$  par un nombre très proche de 1<sup>(16)</sup>, ce qui donne un nombre  $x'$  très proche de  $x$ . En appliquant l'outil « Report de mesure » à  $x'$  et au premier axe, puis à  $x'$ ,  $c$  et  $I$ , on obtient deux points  $X'$  et  $Y'$  très proches de  $X$  et  $Y$ . Le point d'intersection  $P'$  des droites passant par  $X'$  et  $Y'$  et perpendiculaires respectivement au premier et au deuxième axe est donc un point de la courbe  $\gamma$  proche du point  $P$  et la droite  $d$  passant par les points  $P$  et  $P'$  est « presque » la tangente au point  $P$ .

(14) Pour obtenir ce point, la méthode la plus simple consiste à appliquer l'outil « Grille » au système d'axes, de prendre le point  $I$  sur cette grille et de cacher la grille.

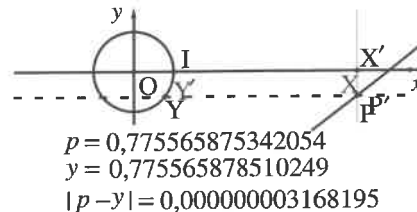
(15) On pourrait aussi calculer avec l'outil « Calculatrice » la valeur de  $\cos x$ , reporter ce nombre sur le deuxième axe, ce qui donne le point  $Y$  et déterminer le point  $P$  comme le symétrique du point  $O$  par rapport au milieu des points  $X$  et  $Y$ . Cette méthode permet d'obtenir la courbe représentative de la plupart des fonctions.

(16) Avec ma version, j'ai utilisé 1,000 000 01.

Avec l'outil "Pente", on peut déterminer la pente  $p$  de la droite  $d$  et en appliquant l'outil "Report de mesure" à  $p$  et au deuxième axe de coordonnées, on obtient un point  $Z$ . Le lieu du point d'intersection  $Q$  des droites passant par  $X$  et  $Z$  et perpendiculaires respectivement au premier et au deuxième axe de coordonnées est donc « presque » la courbe représentative de la fonction dérivée de la fonction sinus : elle « ressemble » à la courbe représentative de la fonction cosinus.



Pour renforcer cette conviction, on peut, avec l'outil "Coord. & Equation", déterminer la première coordonnée  $y$  du point  $Y$ , puis, avec l'outil "Calculatrice", calculer  $|p - y|$  : le nombre obtenu est « presque » nul.



### Annexe 3 Cabri et le hasard

Une des caractéristiques essentielles du logiciel Cabri est la possibilité de définir des macros qui fournissent automatiquement des objets (finaux) construits à partir d'autres objets (initiaux). Les objets auxiliaires (ou intermédiaires) d'une construction fournie par une macro n'apparaissent pas à l'écran et ne font donc pas réellement partie de la figure obtenue.

Dans la version Cabri I pour PC, les objets intermédiaires et finaux devaient pouvoir être déterminés sans ambiguïté à partir des objets initiaux.

Dans la version Cabri II, comme dans la version Cabri I pour Mac, cette règle a été assouplie : les objets intermédiaires ou terminaux peuvent être des points sur objet.

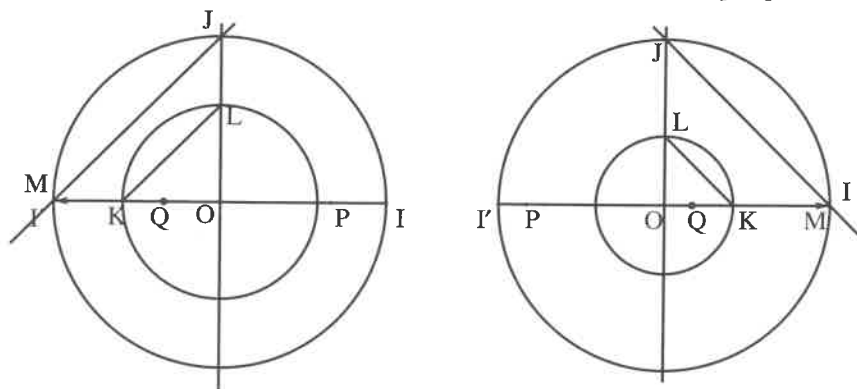
Dans ce cas, lorsqu'on applique la macro, ces objets sont déterminés au hasard sur l'objet correspondant. Par exemple, en partant d'un segment  $[BC]$ , si l'on prend un point  $A$  sur la médiatrice de  $[BC]$  (resp. sur le cercle de diamètre  $[BC]$ ), la macro qui au segment  $[BC]$  associe le triangle  $ABC$  fournit un triangle isocèle (resp. rectangle) quelconque ayant pour base (resp. hypoténuse) le segment initial.

On va utiliser cette possibilité pour construire une marche rectiligne aléatoire. Pour ceci, on part de deux points  $O$  et  $I$  et on détermine :

- le symétrique  $I'$  du point  $I$  par rapport au point  $O$ ,
- le premier point d'intersection  $J$  du cercle centré au point  $O$  et passant par  $I$  avec la médiatrice  $d$  du segment  $[I'I]$ .

Puis on prend un point  $K$  sur le segment  $[I'I]$  et on détermine :

- le premier point d'intersection  $L$  de la droite  $d$  avec le cercle centré au point  $O$  et passant par le point  $K$ ,
- le point d'intersection  $M$  du segment  $[I'I]$  avec la droite passant par le point  $J$  et parallèle au segment  $[KL]$  : ce point  $M$  coïncide avec le point  $I$  ou avec le point  $I'$  suivant que le point  $K$  se trouve sur l'intervalle  $]OI[$  ou l'intervalle  $]I'O[$ .



Si  $P$  est un point quelconque, on appelle *MarcheAléatoire* la macro qui a pour objets initiaux les trois points  $P$ ,  $O$  et  $I$  et pour objet final le transformé  $Q$  du point  $P$  dans

la translation de vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .

Appliquée à trois points  $P$ ,  $O$  et  $I$ , elle fournit le transformé du point  $P$  dans la

translation de vecteur  $\overrightarrow{OI}$  ou  $-\overrightarrow{OI}$  avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ <sup>(17)</sup>. En partant d'un point

$P$  de la droite  $(OI)$  (par exemple un point coïncidant avec le point  $O$ ) et en l'appliquant plusieurs fois au point obtenu et aux points  $O$  et  $I$ , on aura donc une simulation d'une marche rectiligne aléatoire de pas unité  $OI$ .

Remarques. 1. Puisque l'application d'une macro fournit les objets dans l'état où ils étaient au moment de l'enregistrement de cette macro, on a intérêt (pour une bonne vision de cette marche aléatoire) à définir la macro *MarcheAléatoire* de la manière suivante :

- avec l'outil "X→", sélectionner les points  $P$ ,  $O$  et  $I$ ,
- avec l'outil "→Y", sélectionner le point  $Q$ ,
- avec l'outil "Cacher/Montrer", cacher le point  $P$ ,
- avec l'outil "Aspect", grossir le point  $Q$ ,
- avec l'outil "X→Y", enregistrer la macro.

2. Si on remplace le point  $M$  par le milieu du point  $I$  et du point d'intersection du segment  $[I'I]$  avec la droite passant par le point  $J$  et parallèle au segment  $[KL]$ , le

point  $Q$  coïncide avec la probabilité  $\frac{1}{2}$  avec le point  $P$  ou avec le transformé du point

<sup>17)</sup> Si le logiciel utilise un « bon » générateur de nombres pseudo-aléatoires.

P dans la translation de vecteur  $\vec{OI}$ . Si on part d'un point P coïncidant avec le point O et si on applique  $n$  fois la macro correspondante, l'abscisse dans le repère (O,I) du point obtenu est égale au nombre de « succès » dans  $n$  jets d'une pièce.

3. Si on se donne un nombre  $p \in [0,1]$ , soit R le transformé du point O dans

l'homothétie de centre I et de rapport  $\frac{1}{p}$ . Si on redéfinit le point K comme un point sur le segment [RI], le point Q est le transformé du point P dans la translation de vecteur  $\vec{OI}$  (resp.  $-\vec{OI}$ ) avec la probabilité  $p$  (resp.  $q = 1 - p$ ).

On peut généraliser la méthode à des marches bidimensionnelles. Pour cela, on part d'un parallélogramme IJ'J'I' de centre O, K, L, K', L' étant les milieux des côtés successifs [IJ], [JI'], [I'J'] et [J'I]. On appelle  $l$  la droite LL' et  $k$  la droite KK'. Sur  $l$ , soit K'' tel que OK'' = OK et, sur  $k$ , soit L'' tel que OL'' = OL. Prenons ensuite :

– un point M sur le segment [K'K], puis un point M' sur la droite  $l$  tel que OM' = OM,

– un point N sur le segment [L'L], puis un point N' sur la droite  $k$  tel que ON' = ON.

La parallèle à (MM') passant par le point L'' coupe la droite  $l$  en un point U : on peut conjecturer et aisément démontrer que ce point U coïncide avec le point L ou le point L' suivant la position du point M

De même, la parallèle à (NN') passant par le point M'' coupe la droite  $k$  en un point V qui coïncide avec le point K ou le point K' suivant la position du point N.

Soit W le point tel que UOVW soit un parallélogramme : ce point coïncide avec une

probabilité  $\frac{1}{4}$  avec I, I', J ou J'.

Si P est un point quelconque, on définira donc une macro MarcheBidimensionnelle ayant pour objets initiaux les quatre points P, O, I et J et pour objet final le point Q

transformé du point P dans la translation de vecteur  $\vec{OW}$ . Appliquée à quatre points P, O, I et J, si  $(p,q)$  sont les coordonnées du point P dans le repère (O,I,J), elle fournit

avec une probabilité  $\frac{1}{4}$  l'un des points de coordonnées  $(p+1,q)$ ,  $(p-1,q)$ ,  $(p,q+1)$ ,  $(p,q-1)$ .

