VOIR CE QUE L'ON DIT, DIRE CE QUE L'ON VOIT*

RENE GUITART

UNIVERSITE PARIS 7

1 - SI L'ESPACE AVAIT LIEU

L'espace mathématique n'est pas donné, il est à construire, par figures et discours ; il prend consistance de ce qu'on en montre et de ce que l'on en dit, il se tisse de figures et de discours. Les discours pointent les figures ou les déplacent, et aussi métamorphosent les faits géométriques ou les faits de calculs en raisons logiques. Faire de la géométrie suppose l'expérience, avec ces représentations (visions, dictions, et mises en lettres), de nos placements et mouvements comme corps physiques. Quelque chose des divers espaces physiques. Avec le souci de maîtrise de cette expérience se forge le prétexte, l'occasion de commencer à faire de la géométrie, ce qui se soutient, aujourd'hui, de cette hypothèse : de l'espace a lieu. Ce qui se passe avec les figures et leurs mouvements, cela doit valoir parce que c'est dans un espace, et cela doit valoir comme propriétés de cet espace ; et cette valeur nous la pensons comme la tenue de l'espace à soi, ou, aussi bien, comme la cohérence de ce qui peut s'en dire. Nous avons le désir que cette cohérence et cette tenue s'équivalent. Que ce soit visuellement ou discursivement, cet espace n'est pas proprement physique, mais il est ce qui rend compte du géométrique, l'invariant de lieu au seul titre de la vue, dans l'oubli des mouvements et mises en marches, des matières et énergies, des températures, des couleurs et des sons, etc. Quant à l'origine de la géométrie, si l'on en croit Hérodote, cela commença en Égypte avec le problème des redistributions équitables de terres après chaque crue du Nil ; mais la géométrie prend corps de vouloir parler en vérité des places et mouvements de figures dans de l'espace. Cette vérité dirait les proportions et l'harmonie en icelui.

Cela suppose l'expérience du discours, de la conséquence, de l'idée d'hypothèse, et cela suppose aussi que l'on sache dessiner et voir dans l'espace, que l'on sache ce que cela veut dire.

La pensée géométrique commence là, comme, à la fois, pensée hypothétique du voir, de ce qui y est fixe ou changeant ou changé, et comme, en même temps, travail d'articulation ou mise en schémas de ce que l'on dit, afin de le voir.

C'est ainsi que nous proposerons que le géométrique, dans la mathématique, ce soit le désir de tenir ensemble les deux volontés de *voir ce que l'on dit et de dire ce que*

---

* *Bulletin de l'APMEP*, n°431, nov-déc. 2000, 793-812.

l'on voit[1], et cela clairement, en toute intuition et rigueur, et sans renoncer, mais si besoin est seulement, à la puissance obscure du calcul.

Ici une bonne expérience introductive serait l'examen d'une section plane quelconque d'un cube : voir ce qui dans cette configuration a lieu, ce qui y est fixe et changeant, possible et impossible, puis le dire bien en langue française correcte, et puis le dessiner exactement en perspective d'un point de vue quelconque, et, enfin, exprimer la situation en calculs, dans un jeu d'inéquations linéaires en l'occurrence.

Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre : on ne saurait surestimer ce fait que Platon place la philosophie dans la dépendance de la géométrie et de sa pratique. Pour lui la connaissance que la géométrie permet est la connaissance de l'éternel, qui, toujours, géométrise[2] : « ...la géométrie est connaissance de ce qui toujours existe. - C'est donc, mon brave Glaucon, qu'elle doit être propre à tirer l'âme dans la direction de la vérité, propre à parfaire la pensée philosophique dans la direction où, les regards qu'actuellement, au rebours de ce qui se doit, nous tenons en bas, l'âme les tiendra en haut. ». Certes, et nul n'est géomètre s'il n'a contemplé les polyèdres, s'il ne sait bien dessiner un dodécaèdre régulier, ou bien l'icosaèdre, son dual, et bien les dire. Il s'agit de lire Platon[3] et Euclide[4], et Coxeter[5] : on y découvre justement, dans la seule élémentarité du polyédrique, une mise en place suffisante d'une première réalité de l'espace, en particulier dans son rapport à l'ensemble des mathématiques. Le thème des cinq solides platoniciens est lieu d'expression de « la profonde unité de l'Algèbre et de la Géométrie, et surtout de la phénoménale imbrication entre cette dernière et la théorie des groupes »[6]. Ce qui nécessite aussi quelques calculs. On comprend surtout le fait que l'idée de polytope convexe - soit en dimension trois l'idée de polyèdre convexe - relève d'une pulsation nécessaire entre deux déterminations : un polytope convexe est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points, et un polytope convexe est, aussi, une intersection bornée d'un ensemble fini de demi-espaces[7]. On doit penser ces deux déterminations ensemble.

On sait alors répondre à des questions comme celle-ci : quel polyèdre régulier obtient-on en sectionnant un cube à quatre dimensions par un hyperplan orthogonal au milieu d'une de ses grandes diagonales ? Pouvez-vous le dire, le voir, le calculer ? On pensera à ce proverbe chinois qui dit : « Dire c'est bien, voir c'est mieux, toucher c'est parfait ». Indiquons ici qu'il s'agit d'un octaèdre régulier.

Être géomètre serait pour le moins savoir réagir à ce genre de problèmes, en sachant penser ce que notre réaction met en jeu.

2 - LES SYMETRIES, ENTRE MOUVEMENTS ET FIGURES

Être géomètre c'est se figurer que de l'espace a lieu, et savoir soutenir cela d'un dire, comme cohérence d'un discours dont la rigueur informe la vue ; et cela commence avec la combinatoire des figures simples : points, lignes, plans, cercles et sphères. Et, à propos de ces objets, il est question de continuité, de découpage et de collage, d'incidence, de contact, de tangence, d'alignement, de cyclicité, d'angle, de distance. Et avant

---

[1] R. Guitart, *La pulsation mathématique* (rigueur et ambiguïté, la nature de l'activité mathématique, ce dont il s'agit d'instruire), L'Harmattan, octobre 1999, p. 162.

[2] *La république*, VII, 526-527.

[3] *Timée*, 54, 55, *Phédon*, 110 b.

[4] Euclide, *Treizième élément*, n°16 et 17 et n°18.

[5] H.S.M. Coxeter, *Regular polytopes*, Methuen & Co, London, 1948.

[6] J-M. Arnaudies et J. Bertin, *Groupes, algèbres, et géométrie*, 2 tomes, Ed. Ellipses, Paris, 1993.

[7] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate texts in mathematics 152, Springer, 1995, p. 29, 65.

tout, il est question de symétries. Toutes choses dont, en principe, l'œil pourrait juger ... Le discours géométrique articule logiquement les propositions de vérités entre ces termes, et tend à s'accorder au regard. Au départ, l'élémentaire que nous voyons c'est de la symétrie, et l'élémentaire que nous disons c'est l'assimilation des deux éléments qui, dans la symétrie, sont les mêmes. La question est celle du déploiement et des enchaînements de ces éléments de vues et de dits. Ainsi nous nous informons de l'espace, des figures qui y gisent, des dérangements que nous leur faisons subir.

Une forme aboutie de l'entreprise, en particulier chez Moutard et Darboux, dans les années 1860, est, dans le cadre projectif complexe, la géométrie des contacts et orthogonalités entre sphères, et des transformations de l'espace qui préservent les sphères. C'est là un lieu naturel des géométries non-euclidiennes, puisque l'espace dont les éléments sont les sphères est non-euclidien. En ce sens la géométrie élémentaire est de fait principalement, après Thalès et Pythagore, ce qui résonne entre les sphères, leur musique. Dans quoi l'on repérera le jeu des birapports, des homographies, de la dualité, des transformations par polaires réciproques, puis des inversions circulaires, des inversions triangulaires ou transformations isogonales, et, plus largement des transformations quadratiques, des transformations birationnelles, matériaux développés principalement au 19ème siècle.

Si l'on en croit la version usuelle de l'histoire, la géométrie élémentaire s'achève en un sens quand, dans le programme d'Erlangen[8], en 1872, Félix Klein dresse un tableau unificateur des efforts du siècle vers le géométrique élémentaire c'est-à-dire à la fois vers le géométrique synthétique et, simultanément, vers son algébrisation. Toute géométrie serait l'étude de l'action d'un groupe de transformations agissant sur un espace et, par suite sur les espaces de figures associés - le moment où, mettant entre parenthèse la primauté du « vrai » espace et de ses points, on en vient à penser des « espaces de figures », est un tournant nécessaire essentiel, nous n'en reconstituerons pas l'histoire ici - et en particulier consisterait en la recherche des invariants et covariants entre ces actions ; de plus, tous les groupes réellement en question seraient des sous-groupes de groupes projectifs complexes, constitués de transformations laissant invariantes certaines formes quadratiques ou symplectiques. Par suite, le lieu universel de la géométrie en toutes ses variantes serait l'espace projectif complexe. Ainsi, par exemple, la géométrie euclidienne plane est celle du groupe des isométries du plan, groupe vu lui-même comme un sous-groupe du groupe projectif des homographies du plan, et les invariants ou covariants sont les distances, les rayons et centres de cercles, mesures d'angles, aires, etc. Dans une géométrie plus molle, la géométrie affine par exemple, le groupe est plus gros (groupe des transformations affines), les invariants moins nombreux. Le géomètre aujourd'hui n'est pas sans savoir cette variation virtuelle du cadre géométrique, et ainsi, il sait rester dans une pulsation inventive entre ces cadres, ces divers groupes, sans fixer totalement d'avance la géométrie dont il traite. À ce propos Bachelard parle de « dédoublement de la personnalité géométrique ». Cette virtualité fait partie de l'absolu de sa pensée de l'espace, de son cheminement dans les preuves.

Cette universalité de l'espace projectif complexe et de ses transformations birationnelles, il faut la situer dans le fil des efforts d'un Poncelet et d'un Von Staudt par exemple, avec le « principe de continuité », le rôle des points imaginaires, et leur interprétation comme figure réelle. Par exemple, dans le plan, il y a deux points particuliers, appelés « points cycliques » (qui sont imaginaires et à l'infini) tels que les coniques qui

[8] F. Klein, *Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes* (programme d'Erlangen), Gauthier-Villars, Paris, 1974.

passent par ces points soient exactement les cercles. Par exemple aussi, toujours dans le plan, deux cercles distincts ont toujours deux points communs, quand bien même ces points seraient imaginaires, et cela est utile car la droite qui joint ces deux points est, elle, toujours réelle ; c'est la corde commune quand les deux points sont réels, et sinon c'est l'axe radical (lieu des points de puissances égales par rapport aux deux cercles) : c'est par cet exemple que Chasles fait saisir le principe de continuité.

Cette universalité nous la comprenons alors, au niveau projectif réel, en réalisant qu'un point de cet espace, qui est donné par un quadruplet homogène réel (c'est-à-dire un quadruplet de réels non tous nuls et déterminés à proportionnalité près) supporte au moins deux interprétations. L'une est du côté visuel, de la perspective, et dit qu'une telle donnée représente en fait une ligne passant par l'origine dans l'espace à trois dimensions. L'autre, quand on exclut les points annulant une forme linéaire fixe (points dits à l'infini), expose le quadruplet comme système de poids dont il faut affecter quatre points fixés non-coplanaires pour obtenir un certain point de l'espace comme barycentre. Cette pulsation, entre sens visuel et sens pondéral, forme le vrai sens des éléments du projectif, et la ressource imaginaire qui fait passer d'un point de vue à l'autre est cruciale.

Arrivé à ce point, on peut se demander si la géométrie consiste d'abord en des figures ou d'abord en des transformations. On peut nettement répondre qu'il s'agit très exactement des deux, de leur rapport, qui est pulsatif. Et, précisément, jouer le « tout transformation » ou jouer le « tout figure », c'est une erreur foncière, on y perd le sens profondément équivoque des symétries.

Historiquement, cela commença par les figures, et cela se termina par les transformations. Ce mouvement historique est celui du dégagement de l'idée de transformation : transformation des figures entre elles d'abord, de l'espace entier ensuite. On avait d'abord la notion des transformations de figures en tant que déterminées par une troisième figure incluant la première figure et la seconde (sa transformée). A ce stade, la transformation n'était pas dynamique, mais simplement une figure de plus, et il fallut un effort d'abstraction ou de dégagement considérable pour, accompagnant l'invention générale des fonctions (qui n'aura vraiment cours qu'à la fin du 19ème siècle), penser en elle-même la transformation, indépendamment de la figure, comme fonction agissant sur le fond de toutes les figures, à savoir sur l'espace. C'est que, mis à part sa propriété de continuité, constituant en quelque sorte le fond, jusque-là, l'espace n'était pas considéré en soi et indépendamment des figures effectives, n'était pas considéré comme porteur par lui-même des propriétés de toutes les figures. Sans entrer dans le détail de l'histoire de la conception des transformations et de leurs virtualités, et de la géométrie comme étude de l'espace, nous tenons à renvoyer au moins, explicitement, à Desargues et à Pascal, à Descartes. Pascal pose, comme principe 1 de l'introduction à la géométrie, que « L'objet de la pure géométrie est l'*espace*, ... ». Et cet espace est vide (voir la dispute entre Pascal et le Père Noël). C'est donc, dirons-nous alors dans cet esprit, de l'espace comme *place vide* que la géométrie doit aussi traiter. A la figure, qui fait relief s'ajoute donc explicitement la question de son fond, de la place qu'elle occupe, et cela est encore la géométrie. Par contre, chez Descartes (Discours de la méthode), la place vide manque : « ...l'objet des Géomètres, que je concevais comme un corps continu, ou comme un espace indéfiniment étendu ... ». Alors nous avons un nœud pulsatif de discours et calculs entre les virtualités et actualités des transformations, leurs déterminations sur les figures ou sur l'espace, la question du rapport de préséance entre l'espace vide et le plein de la figure. Le vrai géomètre sera celui qui saura ne pas décider définitivement à cet endroit.

On peut dire que l'espace n'était pas regardé, pas regardé comme la seule et unique figure que tous les tracés contingents masquent en en révélant les ressources. Que les transformations s'organisent entre elles comme on sait, en groupes, et, finalement, indépendamment de l'espace et de toutes les figures, cela n'allait pas de soi. Enfin, il allait encore moins de soi que ces organisations ou groupes de transformations contenaient en fait toute l'information pertinente sur les géométries.

À ce moment extrême, la géométrie, élucidant le pur espace comme son objet, l'abandonne au profit de ce qui agit dessus. Mais comme ce qui agit ce n'est, de fait, rien d'autre que le relevé de ce que les géomètres ont entrepris au fil des siècles sur les figures, leurs gestes les plus pertinents, on peut aussi dire pour conclure que la géométrie tient alors dans le pur calcul sur les mouvements de la géométrie, c'est-à-dire sur ce que font les géomètres vers les figures.

Ce n'est pas parce que l'histoire va des figures aux transformations qu'il faut supprimer les figures. Le progrès sur le purement figuratif c'est la conception plus riche qui se dit : figures et transformations. Il semble plus juste de dire maintenant que la géométrie, et en particulier l'acte géométrique, cela résulte d'un va-et-vient entre figures et transformations.

On peut le préciser, par exemple, sur l'idée de la symétrie centrale qui peut se concevoir soit comme mouvement, soit comme structure algébrique du système des points. La symétrie par rapport à un point est une transformation sur l'espace. Mais, aussi, l'opération binaire qui à deux points associe le symétrique du premier par rapport au second est une loi algébrique de l'espace. On peut donc considérer, ou bien le groupe abstrait de tous les mouvements engendrés par les symétries centrales, et ce faisant oublier l'espace, garder les mouvements, ou bien l'espace vu comme équipé de la loi binaire de symétrie, considérée en quelque sorte comme une seule et unique grande figure dans l'espace. Alors on abandonne la question du mouvement, il reste de la figure. Ces deux pensées de la symétrie, du côté du mouvement et du groupe, ou du côté de la figure et de l'espace, établissent une pulsation profonde indispensable dans le travail géométrique, dans le va-et-vient entre le mouvement et la figure. L'essentiel de l'information est dans le groupe, mais il est aussi dans la loi binaire de symétrie, qui est en quelque sorte la figure universelle de l'espace. L'acte géométrique, en particulier la recherche des invariants, le mouvement théorique vers la résolution automatique des problèmes, cela se constitue de fait du va-et-vient entre le groupe (le mouvement) et la loi binaire de symétrie (la figure), entre ce que l'on fait et ce que l'on voit.

En fait, ce que l'on voit, ce que l'on remarque comme propriété des figures, c'est aussi quelque chose de pulsatif, dans la figure cette fois : c'est la symétrie, c'est-à-dire le fait que deux points s'équivalent d'un certain point de vue, sont interchangeables. C'est là l'origine phénoménologique du géométrique, l'étonnement du géomètre. De ce qui pulse là sous l'œil, nous traitons par mouvements, en quelque sorte en le faisant bouger « pour voir », et ce bougé aussi est une pulsation, entre sa source et son but.

Mais, et c'est à notre sens le plus extraordinaire de la version à la Klein des choses, en général ces mouvements de notre géométrie, nous commençons à les faire sans le savoir. Par exemple nous faisons une figure au tableau, et ni nous ni nos auditeurs ne demandons pourquoi nous avons fait la figure là, plutôt que là, un peu à côté, ou bien sur un autre tableau, ou bien sur une feuille. D'emblée fonctionne une grande équivalence qui va de soi, et - c'est le sens de la position de Klein - c'est en fait cette grande équivalence insu qui constitue le fond de notre géométrie. Dans un premier temps implicitement, comme ce que nous savons faire, et, plus tard, donc, explicitement, comme constituant, justement, le groupe de notre géométrie. C'est donc notre inclination vers la figure, notre bougé spontané, insu, sur nos figures, et faisant écho au risque que nous prenons en mettant en marche nos pensées, qui détermine la géométrie que nous pratiquons. Mais aussi, c'est l'objet initial de notre étonnement, la symétrie vue et figurée, qui constitue la géométrie que nous visons. Entre cette pratique et cette visée, la symétrie est le messager qui va et qui vient. La symétrie est la figure de l'espace et la symétrie est notre geste vers l'espace. Peut-être pourrait-on dire que notre geste pour voir l'espace imite l'espace que l'on voit. On voit des symétries, on bouge des symétries, et, en un sens, ce sont les mêmes.

Quand donc la géométrie est, d'une part, un va-et-vient entre voir et dire, et, d'autre part, un va-et-vient entre figure et mouvement, il nous convient d'affirmer que la figure prend la place statique du voir, d'une vue, et que le mouvement prend la place d'un discours. En effet, une fois accouché le point de vue à la Klein, on pourra développer des preuves sur des figures dont les seuls éléments de discours nécessaires seront des indications de mouvements, et des équations entre ces mouvements et leurs effets. À ce stade, c'est le calcul des mouvements, - très différent du calcul cartésien des équations d'objets (de courbes) -, qui vient prendre la place de l'argument logique dans un éventuel système axiomatico-déductif.

3 - AXIOMATISATION OU EFFACEMENT DU VISUEL

La question de l'axiomatisation de la géométrie est celle de la suppression du visuel comme risque, mais aussi, du coup, comme ressource permise. Une fois certains traits exprimables comme « propositions » retenus, la géométrie devient un jeu de combinaisons entre ces propositions, écrites donc elles-mêmes dans une bonne forme par laquelle on peut « calculer ». En particulier, on peut, une fois révoquée l'immédiateté du voir, entrer dans une critique de ce « voir » en termes de constructions de modèles. Pour le coup, on doit penser chaque axiomatisation de la géométrie non pas comme « la » géométrie enfin révélée, mais, seulement, comme « un » théorème exprimant un point de vue sur l'organisation du géométrique. Comme « une » version des faits.

Voici par exemple une caractérisation du plan euclidien[9] : un espace métrique est isométrique au plan euclidien si et seulement si trois choses sont vraies :
- il possède au moins un point, et par deux points distincts passe une « ligne » (c'est-à-dire une image isométrique de la droite euclidienne),
- le complément de toute ligne possède deux composantes connexes, et il existe une isométrie de l'espace laissant fixe la ligne et échangeant les deux composantes connexes de son complément,
- par un point hors d'une ligne passe une ligne ne rencontrant pas la première.

De plus, si seulement les deux premières conditions sont satisfaites, alors l'espace est isométrique au plan hyperbolique.

Nous citons cette version des faits parce que, probablement, il ne serait pas trop difficile de la transporter du côté des cercles, et, aussi, parce que le rôle privilégié des symétries y est clairement mis en relief.

Là encore, comme avec la multiplicité des groupes dans laquelle le géomètre ne choisit pas trop vite, le choix entre les diverses axiomatiques n'est pas urgent, et il est même urgent de ne pas se presser d'opter pour l'une ou l'autre des manières d'effacer le voir, quand on veut rester géomètre, c'est-à-dire si l'on veut tenir bon justement sur la pulsation entre voir et dire.

Cette posture consiste aussi à ne pas trop vite soumettre le géométrique au diktat du logique qui « ferait preuve », idée qui allait de soi au début du 20ème siècle. On irait même, aujourd'hui, chercher au contraire l'envers de ce dispositif et tenter de fonder la logique elle-même sur le voir.

---

[9] B. Iversen, *Hyperbolic Geometry*, London Math. Soc. Student Texts 25, CUP, 1992, pp. 282-290.

4 - LES RONDS ET LES TOURS, SANS LIGNES DROITES

Cet espace qui aurait lieu, se constituerait donc des symétries que l'on voit, des symétries que l'on fait ; ce sont là les points de l'espace, exprimés par leurs virtualités. Mais au-delà des points, regardons les premières figures, les droites et les cercles, figures éminemment symétriques, idées figurées des deux principaux mouvements élémentaires, les translations et les rotations.

Tout mathématicien sait rigoureusement penser et dire le cœur léger : une droite « est » un cercle, un cercle « est » une droite. Il sait très en détail développer les raisons pour lesquelles cela est vrai, et les raisons pour lesquelles cela est faux. Ce qui est intéressant c'est, surtout, sa capacité à faire pour de vrai comme si c'était vrai ; cette assimilation[10] est très utile à la pratique mathématique créative.

Un point commun essentiel est qu'une droite détermine une symétrie, et qu'un cercle détermine une inversion. Rappelons que l'inverse d'un point extérieur à un cercle par rapport à ce cercle est le point commun à la droite qui le joint au centre du cercle et à la corde qui joint les deux points où le cercle est touché par les deux tangentes qui lui sont menées depuis le point ; et qu'il y a réciprocité, que le premier point est l'inverse de son inverse. Les inversions sont comme des symétries, c'est là le sens de la géométrie dite « anallagmatique ». Comme, de plus, dans le plan, la symétrie par rapport à un point peut se décrire comme composée de deux symétries suivant des axes perpendiculaires passant au point considéré, on en vient à l'idée de supprimer les points et les droites, de ne plus garder que l'idée de cercle, de penser à un « espace des cercles » (c'est-à-dire dont les éléments sont les figures qui sont des cercles de l'espace des points).

Alors, dans cet espace des cercles, chaque élément, c'est-à-dire chaque cercle, détermine une transformation, à savoir l'inversion par rapport à ce cercle. L'inversion, effectivement, transforme un cercle (ou une droite) en cercle ou droite. Et nous avons aussi, d'autre part le fait que sur cet espace il y a une loi binaire (partielle) qui en exhibe la symétrie ou l'homogénéité - considérée comme une sorte de figure - à savoir la loi qui à deux cercles associe l'inverse du premier par rapport au second. Ainsi, à ce niveau, les cercles, qui « sont » les inversions, sont, dans l'espace des cercles, des transformations. Là encore, il importe de ne pas choisir entre transformations et figures. Les géométries naturelles de ces espaces de cercles, qui expriment les propriétés d'orthogonalité et de contact, sont non-euclidiennes, nous l'avons déjà souligné.

Le travail avec Darboux en coordonnées tétracycliques (où les points sont repérés par leurs puissances par rapport à quatre cercles fixes deux à deux orthogonaux) permet de traiter dans ces espaces de l'inversion comme d'une transformation linéaire ordinaire. Quant à la question de ce que seraient les figures cercles internes à ces espaces de cercles, les « cercles de cercles », nous suggérons qu'il devrait s'agir des familles de cercles centrés sur un cercle donné et orthogonaux à un cercle donné, soit des systèmes qui enveloppent des courbes cycliques au sens de Darboux (comme les ovales de Descartes par exemple).

Enfin, précisons que c'est de bien connaître les propriétés de l'inversion qu'on peut comprendre aisément comment les points constructibles à la règle et au compas sont constructibles au compas seul[11]. La clé est de savoir comment réaliser, au compas seul, l'inversion d'un point et l'inversion d'un cercle. Après cela, une inversion convena-

---

[10] Dans *La pulsation mathématique*, on donne, en détail, une analyse de comment se construit cette « assimilation » de la droite et du cercle. Nous n'en reprendrons pas le fil ici.

[11] Résultat établi par G. Mohr en 1672, et, indépendamment, par L. Mascheroni en 1797. La preuve via l'inversion est de A. Adler (1890).

ble d'une construction en droites et cercles ne comportera plus que des cercles, et le tour sera joué. On peut même établir la constructibilité à l'aide d'un seul « vrai » compas, d'ouverture limitée à un maximum donné quelconque[12].

Ainsi se confirme l'idéologie du « tout est cercle ». Mais, comme avec le « tout est transformation », l'erreur serait cependant d'oublier le passé, soit, ici, les points et les droites[13].

5 - ÉCLAIRCIE DU CALCUL, ENTRE LE VOIR ET LE DIRE : LES TABLEAUX

C'est ainsi, comme va-et-vient entre voir et dire, au sein de figures simples, au sein des cercles en particulier, que se laisse mieux préciser ce que le mathématicien laisse entrevoir dans son exaltation avec le plaisir de « voir » ou avec le désir de « penser géométriquement ». C'est une façon d'envisager la mathématique vers la beauté des figures comme constitutive du sens. Il y a de la constitution de sens parce qu'alors le géomètre croit voir « ce qu'il y a » et imagine en parler convenablement. Il pense ainsi toucher au réel. En fait il forge ainsi la réalité : notre lecture de la nature ne peut qu'imiter l'art ainsi mis en place, qui du coup vaut pour sens du réel. Ceci est la première jambe de la démarche mathématique.

L'autre jambe de la démarche mathématique ce serait l'oubli de ce désir de sens vu, de contrôle visuel intuitif permanent, de clarté de la figure, et, au contraire, l'abandon nécessaire au jeu aveugle de la littéralité, aux effets des lettres obscures de l'algèbre en particulier. Il est question alors de laisser agir le calcul, de suspendre la volonté de sens.

Ce que la rigueur exige alors ce n'est plus la surveillance de l'intuition du sens visé, mais la surveillance de la correction de l'effectuation d'un algorithme. De ce côté les preuves sont différentes, elles ont lieu en dépit du sens, mais néanmoins pour du sens à venir. On admet en général que la valeur de ce que l'on fait en calculant ne vaut que grammaticalement, comme réglage langagier ou littéral, mais, toutefois d'une façon non-logique, et que l'accès à l'intuition des « choses » auxquelles on serait en train de référer y est provisoirement fermé. La mise en place de la géométrie analytique par Fermat et Descartes (et pour Descartes il s'agit d' « emprunter tout le meilleur de l'Analyse Géométrique, et de l'Algèbre, et de corriger tous les défauts de l'une par l'autre »), installe explicitement les « faits de calculs » à la place des « raisons logiques ».

Entre la preuve visuelle et la preuve calculatoire, il y a, un peu, la même différence qu'entre éclairer et convaincre[14]. Le voir nous éclaire, tout comme le concept qui surgit, le calculé nous convainc, comme de la grammaire appliquée. Mais cette différence, entre éclairer et convaincre, on la constate mieux encore entre voir et dire, entre visuel et discursif.

Le mathématique, jeu des différences entre mêmes, fait tenir ensemble, distincts et inséparables, du visuel, du discursif et du calcul.

Le géométrique tient, en ses débuts, à un certain rapport de dénégation vis-à-vis du calcul et à une autorité du discursif, à une croyance à la « vue géométrique » aussi, qui n'est que la vue schématique du lieu où la géométrie, comme manière visuelle de considérer du même et du distinct, se déploie. Il importe que ce déploiement du visuel

[12] A. N. Kostovskii, *Geometrical constructions using compasses only*, Pergamon Press, 1961.

[13] Bien entendu, l'étude de la géométrie des sphères passe nécessairement par la fréquentation du traité de J. L. Coolidge, *A treatise on the circle and the sphere*, 1916, réédition Chelsea, 1971.

[14] Qu'il faille penser la question de la démonstration dans cette alternative, cela est montré dans E. Barbin, La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques, *Bulletin de l'APMEP*, n°366, décembre 1988, p. 591-620.

demande des ressources visuelles, discursives et logiques, et calculatoires, demande donc plus que du visuel pur.

Enfin, on ne croira pas que logique et calcul soient détachables du visuel. D'une part, il est probable que les lois de la pensée ne nous sont devenues intuitives que comme dérivées des métaphores visuelles[15] sur le contenu et le contenant, cela pour l'implication, sur l'idée de bord et d'intérieur, cela pour les modalités. D'autre part, il y a une véritable géométrie physique de la matérialité du jeu des lettres du calcul, qui suppose encore de la géométrie à deux dimensions en acte.

Et on ne doit pas oublier la géométrie des écritures au sens où la disposition particulière de calculs peut faire comprendre la démarche, et, si elle est bien faite, donne à voir d'un coup d'œil le sens du calcul, ses symétries et équilibres, etc. De nos jours nous faisons, par exemple en théorie des nœuds, des preuves basées sur des réécritures deux dimensionnelles qui supposent des propriétés géométriques de l'écriture elle-même. Dans le passé, l'invention des tableaux[16] (et de leur fonctionnalité dans la résolution des équations ou bien dans le repérage des transformations) a mis en place une véritable pulsation entre, d'une part, la géométrie des lignes et quadriques de l'espace, et, d'autre part, la géométrie combinatoire discrète de la manipulation des tableaux (avec leurs lignes, colonnes, diagonales, bords, et avec la mise en disposition pour effectuer les produits ou pour en obtenir les développements) : il s'agit bien d'une géométrie d'écriture soutenant un calcul qui, lui-même, rend compte de la géométrie dite élémentaire. Des deux côtés il y a à voir et à dire, et, surtout, il est question de dire le rapport entre, d'un côté, ce que l'on voit et manipule dans les tableaux et leurs combinaisons et, d'un autre côté, ce que l'on voit et manipule dans les figures spatiales. Et on soulignera que la mise en place complète de cette pulsation est accomplie quand, enfin, on ose désigner abréviativement tout un tableau par une seule lettre, ce qui permet d'en ignorer la structure interne quand celle-ci est superflue.

La pratique géométrique est alors l'art de transformer des faits de « figure-figure » à « figure-tableau », et réciproquement. Avec l'usage, ce monde de tableaux devient un deuxième espace qui double le premier, le calculateur est le géomètre de cet espace, le géomètre est manipulateur de divers espaces, certains plus visuels, d'autres plus algorithmiques, et sa pensée géométrique devient le travail de métamorphoses, en ces espaces, entre, donc, les effets du voir, du dire, et du calculer. À terme, ces changements de registres, complètement constitutifs de l'acte de penser géométrique, séparent et réunissent sans cesse les intuitions différentes du voir, de l'écoute, du toucher. Et ceci parce que, au plan de la vérité mathématique, toutes les formes d'évidences sont équivalentes. On ne parle pas ici des évidences des sens, mais de l'évidence cartésienne, affect de l'entendement, dont Descartes fonde la vérité, laquelle évidence peut bien, a posteriori, se raconter suivant les différents modes des sens.

Ultimement, suivant le vœu de Leibniz de caractéristique universelle, on voudrait un calcul qui soit identique à la figure et à sa diction vraie. C'est dire que le calcul « brut » à la Descartes, par déconstruction systématique en éléments simples[17], c'est-à-dire en lignes et relations entre ces lignes, devrait, petit à petit, être remplacé par un calcul « intelligent », où, tout en gardant la ressource propre du calcul (celle de pouvoir,

---

[15] Cette conception est soutenue aussi par Thom.

[16] Le nom de « matrice » semble n'apparaître que chez Cayley, le mot « déterminant » chez Cauchy. Les méthodes de résolutions de systèmes linéaires commencent explicitement avec Leibniz (1678), puis se développent, progressivement, au 18ème siècle avec notamment G. Cramer (1750), E. Bézout (1764), A. T. Vandermonde (1771), P-S. de Laplace (1772), etc.

[17] voir l'insistance à ce sujet dans E. Barbin, La méthode analytique de Descartes et l'évidence comme détermination de la vérité, *Analyse et démarche analytique*, IREM de Reims, pp. 79-101, 1998.

faute de voir, calculer), on aurait, en plus, en permanence le plaisir de voir le sens visuel de chaque pas du calcul, ce qui serait aussi immédiatement équivalent comme séquentiation au cheminement nécessaire sur la figure pour tenir le discours qui fait preuve. C'est évidemment dans ce sens que vont les calculs géométriques avec les complexes et les quaternions, le calcul barycentrique de Möbius. Par « intelligence » on veut dire une intelligence porteuse de sens a priori. Car le calcul cartésien ne manque pas d'intelligence en acte. Précisément, il n'y a pas chez Descartes de calcul des coordonnées dans un espace vide, ou, comme on dit aujourd'hui, de « repères cartésiens ». Les éléments qui permettent l'expression de la coordination ne sont pas installés d'avance, mais sont, sur le vif, prélevés dans la figure en cours, si bien qu'ils ont ipso facto l'intelligence de la figure.

On sait comme on est encore loin de cet objectif au niveau général. Du moins il importe de l'indiquer comme point limite de l'activité géométrique, de rester éveillé sur la forme spéciale que prend dans l'ordre géométrique cette pulsation entre visuel, discursif et calcul.

Mais un tel calcul, pour telle géométrie particulière, est justement ce qui est possible dans la conception à la Klein, dans ce que nous appelions plus haut le calcul des mouvements, voire le calcul matriciel des transformations linéaires du groupe de la géométrie. C'est à ce point précis que peut s'argumenter la politique du « tout linéaire ».

Dans un tel contexte les figures fondamentales de la géométrie ne sont autres que les transformations elles-mêmes, et ce qui devient urgent c'est d'avoir la capacité de les repérer.

Ici s'introduit l'idée cruciale de « repère » : les repères d'une géométrie sont des figures telles que l'action du groupe sur les repères soit simplement transitive, c'est-à-dire telles que toute transformation soit univoquement déterminée comme celle qui envoie tel repère sur tel autre. En regardant les groupes correspondants, c'est bien ainsi que sont déterminés les bases d'espaces vectoriels, les repères affines, les repères projectifs, par exemple.

Alors, on peut figurer chaque transformation par la donnée d'un couple de repères, la coder matriciellement ; et là commence une analyse possible de ses effets sur les figures. En quelque sorte un repère est un « demi »-mouvement. Et, également, on a sur les repères une structure de loi binaire de symétrie : étant donné deux repères, le symétrique du premier par rapport au deuxième s'obtient en faisant agir sur le deuxième le mouvement qui envoie le premier sur ce deuxième. Ainsi l'espace des repères figure les mouvements.

La pulsation entre figures et mouvements se réalise concrètement dans le va-et-vient entre l'espace des points et celui des repères, autrement dit dans les propriétés du fibré des repères. C'est bien là que s'installe la conception moderne de l'étude des connexions et de la courbure, dans la suite des anciennes idées sur le repère mobile (Serret et Frenet, Darboux, Elie Cartan).

Le travail géométrique est bien ainsi de figurer des transformations, de calculer, et, à l'envers, de transformer les figures. Ainsi se détaille mieux l'acte géométrique comme pulsation entre mouvement et figure, entre dire et voir, entre calculer et voir.

En un sens le calcul est un moment de respiration dans la tension pour voir, quand on abandonne le contrôle ; et, à terme, on désire que, petit à petit le côté obscur du calcul s'éclaircisse, par identification construite du calcul à la géométrie.

6 - PULSATION DE L'ACTE MATHEMATIQUE

Nous avançons que la mathématique, comme acte, se soutient d'une pulsation nécessaire entre sens et non-sens, fixation et bougé[18]. La tension entre savoir sûr et acte risqué est nécessaire à l'invention mathématique, qu'il s'agisse de nouveauté ou non, et cela sur les points les plus complexes comme sur les points les plus simples : cela commence par des variations nécessaires ouvertes de significations des égalités, des lettres, des notions et définitions, des preuves. La question centrale est celle d'une infinie répétition des interprétations, répétitions non pas à l'identique mais dans la possibilité de changement : répéter, et non pas réitérer. Il est clair qu'il est paradoxal de penser répéter sans réitérer, comme il est paradoxal de penser fixer intégralement le sens, pour de vrai, tout en le laissant, cependant, de fait, suspendu. Mais l'erreur est de croire que l'acte et son risque pourraient se laisser exprimer en toute sécurité logique : le passage à l'acte prend le risque d'illogisme, de sortie du cadre qui l'explique, quand bien même il s'agit de l'acte mathématique destiné à produire du savoir rigoureux. Le mathématicien, le géomètre en particulier, est justement celui qui sait y faire dans cette situation et sa paradoxalité vivante. Pour le mathématicien au travail, entre intuition, écriture rigoureuse, et interprétation, une mobilité virtuelle est toujours possible.

Par exemple, le géomètre, tantôt du côté des mouvements, tantôt du côté des figures, se doit en un sens de ne pas choisir. Par exemple encore, du côté des figures, dans l'acte d'analyse géométrique et de repérage des symétries constitutives de la situation, le géomètre, de fait, s'exprime, à travers les cas d'égalité des triangles : tel triangle est égal à tel autre. À ce moment, en acte, il prend réellement l'un pour l'autre, tout en ne les confondant pas. Ce n'est pas une erreur, un côté imprécis de sa pensée. Ce n'est pas qu'il faudrait dire et penser que les deux triangles sont seulement isométriques. C'est que, au contraire, c'est un savoir-faire rigoureux qui se manifeste là, l'oubli nécessaire de l'isométrie qui justifie, pour pouvoir faire en effet la substitution de l'un des deux triangles à l'autre, si cela s'avère nécessaire. Le géomètre se met ainsi de fait dans la situation de ne pas choisir entre les deux triangles « égaux ».

Pour bien entendre cette proposition, et la portée épistémologique de cette idée de « pulsation », et en particulier ses conséquences du côté de l'instruction, voire de l'auto-instruction, il importe de n'y pas négliger l'expression : « la mathématique comme acte ». Nous pensons que c'est justement de ne pas être suffisamment clair sur la coupure entre acte et connaissance - en particulier en développant trop exclusivement une épistémologie des mathématiques, basée sur le fait qu'il y aurait des savoirs mathématiques et une économie de ces savoirs - que la réflexion sur la nature des mathématiques souffre le plus. Or il ne va pas du tout de soi qu'il y ait des objets mathématiques, clairs et distincts, puis, à propos de ces objets, des jugements qui constituent un savoir, soit un acquis pour profit, et, surtout, enfin, que la nature constitutive de cet acquis – le fait d'être objet de possession – corresponde bien à la nature de la mathématique. Plutôt que ce qui est mis en réserve comme savoirs digérés et bien construits comme potentialités, et plutôt que l'organisation de cette réserve, voire même plutôt que les discours sur cette organisation, ne serait-ce pas du côté de l'acte créatif et des virtualités, des puissances d'intervention du mathématicien, qu'il faudrait repérer d'abord le propre du mathématique ? Ne pourrait-on penser que le savoir mathématique est un accident de la création mathématique ? L'acte mathématique créateur est nécessaire, les savoirs mathématiques sont seulement vrais, et la nature des savoirs mathématiques, elle, est seulement contingente. Ici nous exprimons une vue en quelque sorte à la manière de Cavaillès, pour qui la mathématique produit, de façons contingentes, des nécessités : des théorèmes vrais certes, mais dont on peut se demander : pourquoi ces théorèmes-là plutôt que d'autres ?

---

[18] Cette perspective est avancée et détaillée dans R. Guitart, *La pulsation mathématique*, loc. cit.

C'est en privilégiant tout à fait cette dimension d'acte que j'examine ici le géométrique, pour en souligner des aspects pulsatifs importants, dont il se constitue.

7 – CARACTERE NECESSAIREMENT OUVERT DES SAVOIRS GEOMETRIQUES

Largement, la pratique de la géométrie supposant des changements de registres, en particulier entre voir, dire et calculer, une pulsation aussi entre savoirs et savoir-faire, et demande encore des changements de cadres : passages du mathématique au physique, de la géométrie à la mécanique, de la géométrie à l'algèbre, à l'algorithmique, etc. Et surtout nous voulons ici souligner le caractère définitivement ouvert et pulsatif des savoirs et savoir-faire mathématiques en eux-mêmes, sur place en quelque sorte, en particulier ici de savoirs géométriques basiques, en dépit d'achèvements apparents, à propos, par exemple, de la question du parallélisme et de l'orthogonalité dans la saisie du triangle.

La géométrie élémentaire plane peut bien, il est vrai, commencer avec les théorèmes de Thalès et Pythagore, mais peut aussi se développer autrement. Par exemple à la façon d'Euclide, avec, d'abord, du travail sur les aires de triangles. En fait on peut même remplacer Thalès et Pythagore par le seul énoncé qui dit qu'un point a une puissance par rapport à un cercle. Le théorème de Pythagore s'étend pour les quadrilatères inscriptibles dans un cercle (théorème de Ptolémée) : le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés. On retrouve le théorème de Pythagore dans le cas d'un rectangle. On soulignera aussi que le théorème de Ptolémée « contient » immédiatement les formules usuelles de trigonométrie. D'un autre côté, le théorème de Pythagore s'étend aussi pour les aires des faces d'un tétraèdre trirectangle. Et bien sûr, dans l'algèbre des produits scalaires et vectoriels, ces variantes disparaissent en un sens, sont uniformisées sous un seul principe, celui du développement aisé des calculs de sous-espaces linéaires orthogonaux. En quelque sorte des avatars visuellement distincts sont abrégés[19] en la seule ressource nécessaire de ces calculs.

Savoir la géométrie élémentaire c'est donc ainsi : on sait qu'il y a Pythagore et Thalès, mais on sait aussi comment cela pulse sur soi et hors de soi, on sait une partie de ce qui, de façon permanente, s'en reformule et pourrait en prendre la place. Plus qu'un socle fondateur on connaît le bougé spécifique à la pratique géométrique, ce qui s'abrège en calcul, ce qui s'en re-déploie.

C'est de la mise en acte de ce bougé qu'il dépend que nos savoirs donnent lieu à des savoir-faire.

8 - ÉCOUTER LE REGARD

Si le géomètre éprouve le plaisir de voir, et s'il sait que ce plaisir est légitime, car constitutif de sa nature de géomètre, c'est parce que, ce qu'il voit, il sait que cela se constitue aussi par le fait qu'il le voit. C'est le plaisir d'un acte traversé, et non pas la simple consommation d'une réserve de connaissances ; c'est que, pour le mathématicien, il est plus mathématique de savoir faire les mathématiques que de les savoir. Ce qui confirme que pour le mathématicien au travail, l'évidence comme critère du vrai a lieu, comme affect de l'entendement, dans l'acte, et se distingue du jugement d'évidence, qui, lui, serait un savoir. C'est bien aussi justement parce que l'évidence des savoirs mathématiques ne va jamais de soi pour le mathématicien, et ne vaut qu'à travers l'affect d'évi-

[19] La question de l'abréviation, comme lieu de pulsation, là où s'abrège une histoire, et là d'où se redéveloppent de nouvelles interprétations, est analysée dans R. Guitart, *Évidence et étrangeté* (Mathématique, psychanalyse, Descartes et Freud), Paris, PUF, octobre 2000, 192 p., en III.16.

dence, la possibilité de refaire évidemment le savoir, et ceci dans la pulsation et le risque de penser autre chose.

Supposons un mathématicien idéalement attentif : ce qu'il regarde il le voit, ce qu'il écoute il l'entend. Alors, dans sa confiance au visuel, le risque d'erreur est le risque de n'avoir pas tout regardé ; l'infini potentiel des chemins à parcourir sur la figure laisse clairement la possibilité de trous et points masqués au regard. L'erreur est d'un défaut de localisation du regard. Dans la confiance au discursif, le risque d'erreur, nul au niveau de l'écoute de chaque pas donné, reste un risque global : à suivre bien, pas à pas, tel chemin, localement cohérent, qu'est-ce qui fournit une garantie globale, une garantie que la forme globale du cheminement est possible, que sa poursuite globale est possible, que, géométriquement parlant, dans le champ du regard, le discours a le champ libre ? D'un côté la question : n'ai-je rien oublié, de ce qui en cet espace est là déjà ? Et de l'autre, la question : dans quel espace encore à venir ce discours m'engage-t-il ?

Dans la géométrie pure, le plaisir visuel est souvent plus grand que, sur le versant algorithmique, le plaisir discursif. Il importe de souligner la pulsation entre ces deux registres.

D'un côté, passer une journée entière à regarder, voir et connaître du regard et sans parole, le dodécaèdre régulier.

D'un autre côté se laisser complètement porter par un discours qui nous promène exactement là où il veut nous conduire, comme, typiquement, dans une preuve à la Monge. De cela il est utile ici d'en donner un exemple, car, après les ambitions d'axiomatisation à la Euclide-Hilbert (comme dit curieusement Bourbaki, comme si entre Euclide et Hilbert il s'agissait de la même chose), puis les volontés d'algébrisation excessive du « tout linéaire » à la Dieudonné, il n'est plus évident que l'on s'en souvienne et qu'on veuille en reconnaître la parfaite rigueur. Il s'agit donc seulement de fermer les yeux et de dire et entendre ce que l'on voit.

Considérons donc le problème suivant : étant donné trois cercles[20] extérieurs les uns aux autres dans un plan, prenons-les deux à deux, et dans chaque cas considérons le point d'intersection des tangentes communes extérieures ; alors les trois points que l'on obtiendra ainsi sont alignés.

Voici une solution “à la Monge”[21].

Soit le plan où sont tracés les cercles, et considérons ce plan comme installé dans l'espace. Pour chaque cercle, considérons la sphère dont ce cercle est un équateur ; on dispose maintenant de trois sphères. Nous pouvons alors considérer pour deux de ces sphères le point de l'espace pour lequel l'une cache exactement l'autre, qui est donc le sommet du cône droit dans lequel elles se logent toutes deux. On dispose ainsi de trois points. Par symétrie ces trois points sont dans le plan des cercles équatoriaux dont nous sommes partis. De fait ce sont les trois points considérés dans l'énoncé et dont on demande de montrer qu'ils sont alignés. En effet chacun des trois points de l'énoncé est sur deux tangentes communes aux cercles, et ces tangentes sont des génératrices particulières du cône enveloppant les deux sphères correspondantes, de sorte qu'elles se rencontrent bien au sommet du cône où les deux sphères se logent. Il nous reste donc à voir que les trois sommets des trois cônes sont alignés, et pour cela il suffit de montrer qu'ils appartiennent tous les trois à deux plans sécants distincts : ils seront alors alignés sur la ligne droite intersection de ces deux plans. Les plans cherchés sont les deux plans tan-

---

[20] Ce problème ici n'est pas considéré par hasard. En effet, dans J-V. Poncelet, *Applications d'analyse et de géométrie*, l'étude commence, au premier cahier, par des « lemmes de géométrie synthétique : sur les systèmes de cercles situés dans un même plan » (commencé à Saratoff, sur la Volga, en avril 1813), et, spécialement par la figure de deux ou trois cercles.

[21] On reprend ici un exemple présenté dans *La pulsation mathématique*, pp. 322-323.

gents chacun aux trois sphères et les laissant toutes les trois d'un même côté. Chacun d'entre eux a donc trois points de contact, un avec chaque sphère, et si l'on prend deux quelconques de ces trois points, la droite qui les joint est tangente aux deux sphères correspondantes, et est une génératrice du cône qui les enrobe. En effet si l'on fait tourner le plan en restant tangent aux deux sphères il enveloppe le cône enveloppant ces sphères où elles se logent, en étant précisément au contact avec ce cône suivant une génératrice, à chaque fois la ligne joignant les deux points de contact avec les deux sphères. Cette droite, d'une part est dans le plan considéré, et d'autre part comme génératrice du cône passe par le sommet du cône ; le sommet du cône est donc dans le plan.

Le résultat ainsi obtenu, connu de Monge (1799) peut aussi être exprimé (et démontré, et complété) « à plat ». Ainsi Hadamard[22] précise que deux figures homothétiques à une même troisième sont homothétiques entre elles et les trois centres d'homothétie sont en ligne droite. Et puis, étant données trois circonférences, les trois centres d'homothétie directe sont en ligne droite ainsi que chaque centre d'homothétie directe avec les centres d'homothétie inverse qui ne lui sont pas conjugués ; les quatre droites ainsi définies sont dites « axes de similitude ». Les axes de similitude de trois circonférences forment un quadrilatère complet ayant pour diagonales les trois lignes des centres.

Dans une version encore plus « moderne », la chose se réduira à la présentation explicite de la loi de composition des homothéties-translations du plan affine, à la compréhension de la structure de ce groupe. La propriété initiale sur la composition des homothéties peut être démontrée géométriquement, à la façon d'Euclide (c'est ce que fait Hadamard), - disons que c'est une simple application du théorème de Ménélaüs -, ou bien par un simple calcul de la géométrie analytique cartésienne.

Ainsi, le résultat est saisissable dans le calcul, dans la géométrie plane élémentaire, ou encore dans la géométrie dans l'espace. Fonctionnent alors trois preuves d'un « même » résultat, ancrées dans trois registres différents d'évidences, mais dont la qualité d'évidence tout court est la même. Il est évidemment très intéressant de montrer aux élèves la variété des angles d'attaque et des résolutions d'un problème, de leurs métamorphoses, et surtout la liberté qu'ils ont à déterminer eux-mêmes d'un mode de questionnement et des changements de modes de questionnement qui leur conviennent. Enfin, il importe de comprendre que c'est la saisie évidente de ce bougé entre les preuves possibles qui constitue, au plan mathématique, le sens.

9 - QUELS RONDS ? QUELS ESPACES ?

Ainsi donc, vacillant nécessairement toujours un peu entre voir et dire, appuyé de guingois sur de possibles repérages et calculs en d'autres espaces, le géomètre, un peu fasciné, avance, écoute ce qui se dit des regards, ne sait plus au juste s'il s'agit des figures ou des mouvements, s'il s'agit de ce qu'il voit ou de son mouvement de réaction face à cela, si cela c'est la symétrie, sa fascination même, ou bien ce qu'il en dit. Y a-t-il de l'espace, de la figure même : ce dodécaèdre existe-t-il ? Et enfin, au bout du compte, la perfection même de la géométrie, le cercle donc, cela constitue-t-il bien un objet ? En fait, cela, l'enjeu de cet objet, se révèle à son tour pulsatif. En effet, on a ceci :

- appelons cercle le lieu des points du plan à une distance fixé positive ou nulle d'un point fixé.

[22] J. Hadamard, *Leçons de Géométrie, I Géométrie Plane*, première édition 1898, réédition Jacques Gabay, Paris 1988, pp. 137-139.

- appelons cycle le lieu formé de deux points distincts fixés et des points du plan d'où l'on voit ces deux points fixés sous un angle orienté fixé à deux droits près et non nul.

Alors le point intéressant est que cercle et cycle c'est la même chose, si l'on est en géométrie euclidienne, mais c'est différent si la géométrie est non-euclidienne. On constate donc que le fait de passer de cercle à cycle, d'assimiler l'un à l'autre cercle et cycle, est en fait une ressource dynamique décisive[23] de la géométrie euclidienne. Le géomètre, qui ne « voit » pas là de différence mais qui « l'entend », peut bien, sans le savoir, glisser sur cette « nuance ». Le théorème qui donne l'équivalence est là, plus tard, pour assurer que ce que le géomètre entendait instinctivement peut bien se pointer. Mais, une fois la conscience acquise de la « nuance », le travail en « géométrie absolue » ou bien en « géométrie neuve[24] », devra nécessairement fonctionner sur ce dédoublement de l'objet « cercle » en deux objets : « cercle » et « cycle ». Et cette pulsation entre cercle et cycle relève en fait d'une plus fondamentale, à savoir la pulsation entre angle et distance, autour de laquelle s'organise les neuf possibilités de géométries planes suivant Cayley[25].

Il va de soi que de telles réouvertures d'objets peuvent bien avoir lieu sans cesse et partout : y a-t-il un objet « conique » ou cela cache-t-il en absolu plusieurs choses ? Etc.

De plus la question qui vaut sur la figure vaut sur son fond. Il n'est pas sain de scotcher la figure à son fond : on a vu au numéro précédent le profit qu'un changement de dimension peut apporter à une figure. La question est rouverte : en quels espaces est-il utile que telle figure ait lieu ? On parlera là de pulsation dimensionnelle.

10 - COURBES OU EQUATIONS, LIMITES, TANGENTES

Même si la distinction entre courbe géométrique et courbe mécanique peut être notée chez Pappus, c'est depuis Descartes, et suivant son insistance explicite, que le géomètre sait penser et mettre en œuvre la pulsation qui consiste à prendre une courbe bien tracée mécaniquement pour une équation, et réciproquement, et qu'il sait faire fonctionner ce va-et-vient par lequel le voir et le calcul, ou la géométrie et l'algèbre, dialoguent. La mise au point finale rigoureuse de l'intuition cartésienne résidera dans le théorème de Kempe (1875) : une courbe algébrique plane est exactement une courbe localement traçable par un système articulé. Désormais les mouvements de tels systèmes articulés sont appelés par Darboux « mouvements algébriques ». Cette appellation est frappante, parce que encore « mouvement » implique l'idée d'une continuité, fluide, et « algébrique » implique l'idée d'une combinatoire algorithmique, discrète. On a là encore un savoir-faire du géomètre aujourd'hui : savoir penser et vivre dans cet écart, entre discret et continu, que constitue la pulsation entre algèbre et géométrie.

Notons aussi, du côté de la description analytique de nos objets, l'alternative cruciale : description paramétrée, où l'objet est obtenu comme image, comme parcours à effectuer par un « mobile », et description par équation implicite, c'est-à-dire par les relations, internes à l'objet, valides pour tout point de l'objet. L'équation « explicite », comme graphe de fonction, occupe ici une position médiane. La résolution concrète des problèmes, de lieux géométriques ou d'intersections par exemple, dépend vitalement de cette pulsation entre relations implicites et paramétrisations. Ainsi l'intersection de deux

---

[23] *La pulsation mathématique*, p. 210 et suivantes.

[24] au sens de C. Velpry, Kepler's laws and gravitation in non-Euclidean (classical) mechanics, *Heavy Ion Physics*, 11, 1-2, (2000), Akad. Kiado, Budapest.

[25] Voir H. Bareil, Matériaux pour une documentation, *Bulletin de l'APMEP*, n°427, p.265.

objets s'obtient « naturellement » quand l'un est sous forme paramétrée et l'autre sous forme d'équation implicite.

Les idées de limite, de contact, de tangente, nécessaires au géomètre, en particulier pour penser, au-delà des polyèdres, les objets privilégiés que sont les courbes, sont elles-mêmes pulsatives. Ainsi la limite peut se penser tantôt comme « mouvement vers », tantôt comme « approximation de ». Ainsi aussi l'idée de tangente, dans le dédoublement de la pensée de la limite, se dédouble encore. En effet la tangente c'est, en un point fixé de la courbe, la position limite d'une corde attachée à se point, et dans ce cas on fixe d'abord le point de contact puis on détermine la direction ; ou bien la tangente c'est, la direction étant d'abord fixée, la parallèle à cette direction qui touche la courbe, et alors le point de contact est déterminé après avoir fixé la direction. L'échange entre les deux points de vue est la ressource pulsative fondamentale du géométrique différentiel. Figurativement, les deux possibilités sont unifiées dans l'idée d'élément de contact, à savoir de droite pointée. A ce moment, on peut aussi bien renverser la vision d'une courbe et, au lieu de la penser comme lieu de ses points, la considérer comme enveloppe de ses tangentes. Entre ces deux possibilités le géomètre se gardera fort de choisir définitivement.

Mais si l'on creuse un peu la question, on voit qu'ici le fond intéressant de l'affaire avec l'élément de contact, c'est justement qu'on peut le penser comme droite munie d'un point ou bien comme point traversé par une droite. Et c'est finalement au moment de réellement faire le dessin que l'on achoppe : on doit choisir lequel des deux (le point ou la droite) on fait d'abord. Et même la droite, on doit la faire dans un sens ou dans l'autre. La figure finale oublie explicitement la nature exacte du geste qui l'a produite. La pulsation active et géométriquement efficace était dans l'équivoque du geste du dessin, et sa révélation, son analyse, expose l'involution de Legendre comme génératrice d'un groupe d'ambiguïté d'ordre deux. On est ici dans le même cas qu'avec les groupes des géométries, on découvre sous la figure le geste de la poser qui allait de soi.

11 - ÉQUIVOQUES SUR LA VISEE GEOMETRIQUE

Si on analyse les choses soigneusement, il n'est pas si certain que l'on puisse penser comme distinctes les idées de nombres et de lettres[26]. Mais maintenant, nous voulons insister sur le fait que la géométrie cartésienne ne demande que des grandeurs, au sens antique du terme, et pas du tout une construction préalable du corps des réels. Les équations forment un jeu d'équivalences entre des grandeurs. Par exemple, c'est une pensée très utile que de concevoir le calcul barycentrique, dont nous avons dit la signification dans l'objet magique de la géométrie qui est l'espace projectif complexe, sans données numériques, mais en désignant justement les poids utiles comme des mesures de grandeurs figurées dans la situation (segments, aires, etc.).

On peut alors penser et développer le calcul barycentrique comme celui d'un pur « équilibre des grandeurs », comme l'harmonie rectiligne intrinsèque de l'espace.

On dira que l'affinité[27] constitue un fond naturel d'équilibre de toutes grandeurs de l'espace, dans lequel les courbes se déterminent et apparaissent comme liaisons supplémentaires entre des grandeurs particulières.

---

[26] *La pulsation mathématique*, p. 154.

[27] En quelque sorte, l'affin justifie les moyens ! (sic) C'est-à-dire que l'espace affine n'est autre que celui du calcul des équilibres et moyennes de points pesants. Cela seul constitue la structure affine ; ainsi pensée, on peut, c'est important, la distinguer de la structure vectorielle. Cette dernière n'existe pas dans l'espace homogène sans origine fixée.

Un premier malentendu possible est donc celui-là que le calcul des coordonnées en géométrie impliquerait du numérique. Le relever est intéressant, car, par là, la teneur visuelle des coordonnées est soulignée. Ainsi le calcul n'est peut-être pas si peu géométrique dans ce qu'il manipule, et la question est plutôt celle de l'interprétation géométrique de ce que l'on y fait, des gestes du calcul.

Un deuxième malentendu consiste à croire qu'une preuve algébrique est plus rigoureuse qu'une preuve géométrique. L'erreur de fond là derrière est d'imaginer, à tort, qu'il puisse y avoir des démonstrations sans monstrations. C'est impossible, et c'est pourquoi voir et dire sont inséparables dans la pratique mathématique. Entre voir ce que l'on dit et dire ce que l'on pense, entre ce voir et ce dire, il y a un processus infini ouvert qui ne se referme que sur lui-même, et la rigueur c'est le sens de la conduite de ce procès, ce n'est pas sa disparition impossible.

La différence, au niveau élémentaire, entre le géométrique et l'algébrique, tient non pas à la rigueur mais au risque. Le travail géométrique, plus ouvert, demandant tout de suite plus d'initiative, est plus risqué. La combinatoire géométrique est notoirement plus riche que celle des deux ou trois mécanismes fondamentaux de l'algèbre. En algèbre, comme en géométrie, il faut apprendre essentiellement à faire apparaître et disparaître des objets. Mais c'est plus facile en algèbre, au début du moins, où il suffit de savoir faire quelques factorisations et décompositions assez canoniques, bien repérées, tandis qu'en géométrie les éléments à introduire ou à effacer sont tout de suite très nombreux, plus complexes. Cela demande une plus grande ambition et une autonomie de pensée manifeste.

Cependant, dès que l'on dépasse le niveau le plus élémentaire, la différence entre algèbre et géométrie s'estompe. Aussi bien la différence de contenu, de connaissances portées, que la différence de pratiques. L'art algébrique se développe aussi comme une vue des calculs, et doit découvrir sa propre équivoque. Les groupes des géométries décrivent l'équivoque du géométrique, c'est-à-dire l'ambiguïté des gestes invisibles accomplis pour voir ou faire les figures (lesquelles figures, en retour, ne font que faire traces de mouvements vus ou visibles, virtuels ou actuels). Ce qui s'inscrit en ces groupes c'est du geste, qui ne peut se dessiner. De même, en algèbre, les gestes équivoques, par exemple ceux d'indexations des racines d'équations, qui sont longtemps passés inaperçus, ont une grande importance, et c'est eux que les groupes de Galois prennent en charge. Donc, au niveau des actes, on peut dire que le groupe de Galois est la géométrie du calculateur au travail, donne à voir la forme des actes de calcul. A un niveau plus savant, il se trouve qu'effectivement on a des principes de dualité entre algèbre et géométrie, entre groupes de Galois et revêtements de surfaces[28] par exemple.

Mais un malentendu encore que nous voulons relever est la question même du voir. D'abord, un point c'est invisible. Cela peut se concevoir, mais telle trace matérielle que l'on prend pour un point, on sait bien que « ça n'est pas ça ». Le géomètre est aussi celui-ci qui sait idéaliser des traces physiques, c'est-à-dire se tromper systématiquement et avec art à leurs sujets. Mais cela ne tient pas qu'à la minceur pour l'œil des points idéaux, points qui peuvent bien, conceptuellement, être épais (par exemples être des cercles). Ainsi, qui a jamais vu, en entier, une droite ? Qui a jamais vu un cercle, vraiment rond et non pas elliptique ? Et qui a jamais vu une ellipse ? En fait, aucun des objets de la géométrie n'a jamais vraiment été vu. Ce que l'on voit, en géométrie, c'est de l'interprétation visuelle, du discours sur cette interprétation. Pour que l'on soit vraiment

[28] Voir, par exemple, A. et R. Douady, *Algèbre et théories galoisiennes*, 2/ théories galoisiennes, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1979.

dans la géométrie, comme question du voir, il faut, en un sens, que rien ne soit réellement vu comme chose. Mais cet effacement c'est encore ce dont la géométrie traite.

Aussi, un cours de géométrie, cela peut être sans parole, l'exposition d'un lieu figuré. Et, autre extrême, comme ici, cela peut être sans figure, sans calcul, rien qu'un discours par lequel on entend parler des figures et des mouvements, où les deux se distinguent et aussi se confondent, formant ainsi un cheminement de l'œil dans le champ des symétries et des rondes. Et ce discours, celui de Monge faisant ses cours, pour l'entendre, il faut fermer les yeux. Vous voyez ce que je veux dire.

La visée géométrique, que l'on peut à une époque étayer de l'idée que « un espace a lieu », qu'il consiste en gros en l'espace projectif complexe, les symétries dans les figures ou bien les symétries mouvements, et que peut-être même l'essentiel est la géométrie des cercles, de l'inversion, cette visée, donc, en fait, à proprement parler, ne voit rien de réel, n'est que la pratique d'une « écoute du regard ». De plus elle est indissociable des discours et des calculs. Aujourd'hui, elle s'est renforcée de la topologie générale ou algébrique, de la géométrie algébrique, de l'algèbre homologique, où disons, la question majeure développée, géométriquement parlant, est la question du « bord » comme opération. La visée géométrique, métamorphosée toujours, suit en quelque sorte le développement général de la mathématique, et son espace est désormais tout le champ où se déploie l'invention mathématique.

Toute la mathématique n'est-elle pas le moment du spectacle du vrai et de sa contemplation, le moment du théorème, donc, allié à la capacité d'entreprendre, d'intervenir, d'avancer des problèmes ? Et, du coup, la question du regard à distance, largement associée à la volonté de maîtrise, la question de la géométrie (des figures, des mouvements, des calculs, des raisons), cela constitue le point d'unité du mathématique, pendant que la multiplicité des problèmes en donne la diversité.

Ou bien, pour mieux dire, l'unité des mathématiques se constitue de notre capacité indéfinie à traiter mathématiquement de notre désir de maîtrise, de notre « vouloir voir », et cela s'éprouve dans le géométrique. Son lieu maintenant est le théâtre[29] mathématique entier, et non pas telle ou telle construction ou mise en scène spéciale du voir, de l'espace.

De ce point de vue, le dernier malentendu que nous voulons donner à entendre ici est celui-ci : l'esprit de géométrie est, aujourd'hui, moins basé sur une supposition qu'il y aurait de l'espace, hors du champ mathématique, à interroger par les moyens mathématiques, que basé sur la tension de pensée qui fait poursuivre l'unité mathématique, au-delà des questions de formalisme ou de méthode, dans le désir de voir, de voir ce que l'on fait.

Le géomètre est celui qui veut voir la mathématique qu'il fait, et voir son acte[30].

---

[29] J-L. Barrault disait : « Le théâtre c'est la poésie, dans l'espace. »

[30] Ainsi Klein « découvre » sur l'icosaèdre, qu'il « connaît » bien, l'espace des trajets mentaux du labeur résolutif de l'équation du cinquième degré et des pratiques associées avec les fonctions modulaires (F. Klein, *Lectures on the icosaedron and the solution of equations of the fifth degree*, Dover, 1956).