Géométrie du secondaire et programme d'Erlangen

Michel Carral(*)

Résumé
Dans ce texte on trace les lignes de ce que devrait être un enseignement de la géométrie du secondaire basé sur le programme d'Erlangen dans l'hypothèse où ce programme devrait en consister la pierre angulaire, ce qui est loin d'être une évidence dans la mesure où la géométrie ne se résume pas aux seules études des transformations ; une telle étude n'est qu'une des dernières étapes de reconstruction ou plutôt de classification dans un esprit d'unification d'une géométrie qui trouve ses racines dans les mathématiques grecques et qui s'est développée tout au long des siècles.

Erlangen est une ville universitaire de Bavière qui connut une grande prospérité au XVII^e^ siècle grâce aux protestants français immigrés après la révocation de l'Édit de Nantes. En 1872 Félix Klein, agé de 23 ans, présente pour la rentrée universitaire une « dissertation » qui réunifit les méthodes géométriques métrique et projective sur un principe général. Ce principe unificateur est fondé sur la notion de groupe de transformations, et c'est sur ce principe que Klein propose un « programme », aujourd'hui appelé programme d'Erlangen, pour une conception organique de la géométrie basée sur une hiérarchisation des groupes de transformations. Le concept qu'une géométrie est la donnée d'un groupe de transformations opérant sur un espace renverse les rôles entre les entités géométrie et groupe : c'est le groupe qui devient l'objet primordial et les divers espaces sur lesquels il opère mettent en évidence les aspects de la structure de groupe. Cette vision révolutionnaire est d'une rare fécondité avec l'étude des « morphies » entre des géométries en apparence très différentes comme la géométrie conforme de l'espace à trois dimensions et la géométrie non-euclidienne hyperbolique à quatre dimensions, celles apparues depuis lors, ou l'utilisation de ce concept en géométrie différentielle, par exemple en géométrie riemanienne avec E. Cartan, ou plus simplement dans les modèles de géométrie non-euclidienne donnés par Beltrami et Poincaré(1).

La pertinence de concevoir un curriculum dans l'enseignement du secondaire fondé sur le programme d'Erlangen n'est pas posé ici. C'est une question qui mérite un vrai débat.

(*) IUFM de Midi-Pyrénées, centre de Toulouse.

(1) Notons que le géomètre Félix Klein était aussi un mathématicien au spectre large qui s'est préoccupé d'histoire, de pédagogie et de vulgarisation. Il a écrit des textes pour permettre à un plus vaste public, en particulier pour des professeurs de lycée, d'approcher les mathématiques de son temps.

Il a fallu de nombreux siècles pour que le concept de transformation émerge, acquière toute sa richesse et se différencie du mouvement. Ceci a été rendu possible grâce au développement de la théorie des groupes et de ses applications à la géométrie : c'est ce qui caractérise le programme dit d'Erlangen.

Un bref regard dans le temps sur les enseignements de la géométrie du secondaire montre qu'après être passé de l'étude des grandeurs et des figures aux « mathématiques modernes » on est arrivé à ce que l'on pourrait qualifier l'étude de ce programme. Concevoir le programme d'Erlangen comme un objectif à atteindre en fin du cursus du secondaire, objectif fort louable, ne veut pas dire imposer le programme d'Erlangen comme outil d'apprentissage, ce qui serait à mon sens une erreur épistémologique comme le furent les mathématiques modernes.

Travailler sur des configurations géométriques avec les transformations pour comprendre l'intelligence de la situation, c'est-à-dire son essence (ou ce que l'on pourrait appeler son ressort interne), c'est être capable de reconnaître et d'utiliser celles auxquelles on a à recourir pour décrire, expliquer une configuration donnée. Pour être capable d'une telle autonomie sur des figures non stéréotypées ou non figées, il faut avoir la connaissance de ces transformations et connaître leurs actions sur les objets élémentaires de la géométrie, sinon ce serait concevoir l'enseignement de la géométrie comme une mémorisation de clichés, ce qui nierait tous les apports qu'apporte cette science. Cette connaissance nécessite un long apprentissage, apprentissage gradué, car elle pose un problème général qui est celui de l'observation. En réponse à ce problème, R. Thom dit « *Peut-on, dans un paysage de phénomènes, reconnaître un objet ou une chose si l'on n'en a pas préalablement le concept ? Si l'on n'a pas le concept d'un objet, on ne le reconnaîtra pas... La possibilité de reconnaître un être en général est toujours subordonnée à une conceptualisation.* »

Une transformation agit sur l'espace entier et la vision que l'on a de son action est une vision statique : on a un plan ou un espace initial et un plan ou un espace final. En termes de théorie des ensembles c'est une application d'un espace source dans un espace image, et ceci n'explique pas le mouvement qui fait passer de l'un à l'autre. L'appréhension d'une isométrie (directe) peut être initiée comme la traduction d'un mouvement minimal entre deux états. Cette vision des transformations (isométries, similtudes) est de plus locale : son action se constate sur une figure, on n'en a qu'une représentation restrictive. Ceci amène une difficulté dans la recherche de la transformation adéquate au problème considéré, difficulté qui peut être levée par la connaissance de configurations riches.

Par suite pour appréhender le concept de transformation, un premier travail consiste à différencier une transformation d'un mouvement. Cette rupture doit être prise en charge tôt dans la formation du secondaire ; les frises, les pavages que l'on rencontre au primaire sont des objets invariants par le mouvement, objets dont la reproduction peut amener l'élève à une prise de conscience de l'espace. Les activités développées autour du dessin de frises ou de pavages peuvent permettre de faire comprendre explicitement le mouvement : c'est « reproduire plus loin » avec une certaine règle du jeu.

Une transformation agit sur l'espace entier et on constate son action sur une figure (c'est local) qui ne comporte pas nécessairement tous les éléments pour voir cette transformation. Ce qui fait que la compréhension de la notion de transformation implique une prise de conscience de la notion d'espace, ce qui n'est pas chose aisée dans la pratique. Pour s'en convaincre l'Histoire est là pour nous dire le temps qu'il a fallu pour concevoir l'espace.

Une autre difficulté liée aux transformations vient des concepts de figure et de transformation. Une transformation est une application qui associe un point à un autre point, et l'on étudie, ou l'on utilise l'action de la transformation sur des figures élémentaires. Or le concept de figure, dans ses approches premières vient du dessin ou d'une certaine idéalisation d'objets physiques. Le commençant ne conçoit pas le point, il conçoit des objets, des volumes, puis des surfaces, puis des lignes ; le point étant défini comme l'intersection de deux lignes. C'est-à-dire un segment, un cercle, sont un et un seul objet, ce ne sont pas des ensembles de points. Comme disait Euclide *soit un point sur un segment*... et non *soit un point du segment*... Et, pour arriver à la conception des objets géométriques des textes d'Euclide, il faut déjà ne plus être dans le figuratif. Ceci nécessite un apprentissage commencé dans le Primaire et qu'il convient de consolider en début de Collège pour amener l'élève au concept de figure. En effet l'analyse de travaux d'élèves sur ce thème, analyse qui fait partie de la formation et du concours de recrutement des Professeurs des Écoles, montre que c'est loin d'être une compétence aisée a acquérir.

La première approche des transformations devrait être consacrée à la description de leurs actions sur les objets élémentaires de la géométrie, c'est-à-dire, si un segment se transforme en un segment (ou une droite en une droite, ou en un cercle, ou...), un cercle en cercle, ou ... et de voir le comportement des positions relatives de ces objets (par exemple, deux droites parallèles se transforment-elles en deux droites parallèles ?). Pour convaincre l'élève de cette nécessité, des contre-exemples peuvent être facilement visualisés avec des logiciels inter-actifs de géométrie. Un deuxième temps devrait être de reproduire les actions d'une transformation sur des figures composées d'objets élémentaires, puis d'en construire certains.

Mais ces activités, même dominées, ne donnent pas la maîtrise des transformations et des groupes dans lesquels elles vivent. En effet il faut, pour cela, être capable de trouver la transformation adéquate à la situation considérée, et être capable de conjuguer les actions de deux, ou de plusieurs transformations entre elles. Or dans un contexte donné, pour trouver une transformation-outil, il faut connaître ses caractéristiques, c'est-à-dire connaître son action sur des objets géométriques (élémentaires), ses points fixes s'il y en a, mais surtout connaître ses invariants et avoir la maîtrise de ceux-ci(2). Ces prérequis sont un passage obligé pour l'acquisition de cette maîtrise. En effet, lorsqu'un mathématicien est en présence d'une transformation qu'il veut étudiert, son premier travail est de chercher des invariants pour pouvoir l'identifier, la déterminer ultérieurement : si dans une étude future qu'il aura à mener, il pense qu'une certaine transformation est à concevoir, à utiliser, il sait que la faire apparaître est souvent une tâche malaisée. Il cherche donc à voir si les

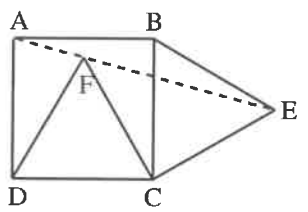
(2) Les invariants sont des grandeurs ou des rapports de grandeurs conservés par un groupe de transformations ; les points fixes sont des éléments caractéristiques d'une transformation.

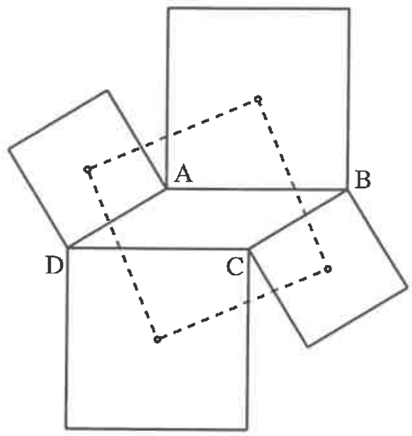
invariants de cette transformation sont là, ce qui est plus aisé, et donc à savoir si cette transformation est à considérer pour son problème. Si l'existence de la transformation lui suffit, le plus souvent il ne la détermine pas, il l'utilise en ne concevant que son existence ; si son existence n'est pas suffisante, il cherche à la déterminer à partir des éléments qu'il a identifiés. Les cas d'égalité des triangles ou les cas de similitude sont des énoncés mettant en jeu des invariants naturels qui permettent de dire si des isométries, ou des similitudes, sont à considérer dans la configuration étudiée. Il est regrettable que ces invariants ne soient pas étudiés au niveau du collège car ils permettent, en outre, de penser naturellement les notions d'égalité ou de même forme entre deux objets géométriques, sans avoir la nécessité de considérer les transformations afférentes.

Ces raisons me laissent à penser qu'une algébrisation de la géométrie trop précoce n'est pas judicieuse ; de plus elle impose une pensée basée sur des notions géométriques minimales (ou pauvres), sur des objets élémentaires et non sur une pensée basée sur des objets plus familiers possédant des régularités, source de richesse et d'imagination. Les deux exercices classiques suivants me paraissenrt plus abordables et plus constructifs d'images mentales si on les traite avec les cas d'égalités des triangles et/ou les angles qu'avec les transformations, même si la transformation à considérer dans le deuxième exercice parait évidente :

Exemple 1 : Sur les côtés BC et CD d'un carré ABCD on construit extérieurement et intérieurement les triangles équilatéraux BEC et CFD respectivement. Alors les points A, F et E sont alignés.

Exemple 2 : Extérieurement à un parallélogramme ABCD on construit sur chaque côté un carré. Les centres de ces carrés sont les sommets d'un carré.





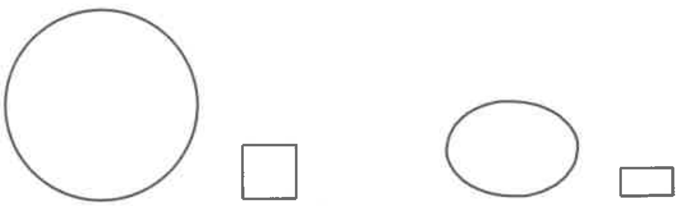
L'enseignement de la géométrie au Collège devrait être centré sur l'étude de ces invariants, c'est-à-dire sur les grandeurs et les figures, avec une consolidation de l'observation de l'action des transformations sur des figures dans la continuité de ce qui a été fait au primaire. Cela permettrait à l'élève de stabiliser la pratique des transformations en les différenciant du mouvement et, de plus, de les utiliser pour des démonstrations dans le cas où celles-ci seraient évidentes à concevoir.

Cette étude devant se penser comme une étude sur le concept des grandeurs et non comme une étude sur la mesure de ces grandeurs, comme c'est trop souvent le cas pour les angles et les aires. L'apprentissage de ces concepts au Collège pourrait se concevoir comme une suite et une théorisation des activités Tangram du Primaire comme il est parfois fait avec le théorème de Pythagore avec des démonstrations type puzzles (c'est-à-dire par décomposition et recomposition).

L'utilisation des aires comme outils de démonstration serait un complément heureux des cas d'égalités et des cas de similitude ; elle permettrait, notamment, de mettre en place des activités appréhendant le concept de mesure, concept qui se comprend en mettant en acte le changement d'unité comme l'éclaire l'exemple suivant(3) :

Exemple 3 : Déterminer l'aire d'une ellipse d'axes $2a$ et $2b$.

Par une affinité de rapport b / a, on peut se ramener à l'aire d'un cercle de rayon b. Cette aire est donnée par le rapport $(\pi\, b \cdot b)$ existant entre le disque et le carré de côté l'unité choisie. L'affinité réciproque conserve ce rapport entre l'ellipse et le rectangle image du carré, c'est-à-dire avec le rectangle de côtés a et b. Pour évaluer l'aire de l'ellipse par rapport au carré unité choisi, il suffit de composer ce rapport avec le rapport existant entre le rectangle image et le carré unité ; on trouve $(\pi\, b \cdot b) \cdot (b / a)$, soit $\pi\, a \cdot b$.



La géométrie du Lycée devrait être centrée sur l'utilisation des transformations comme outil de démonstration, c'est-à-dire sur la capacité pour un élève à trouver la transformation qui permettrait de découvrir l'intelligence de la configuration ou de la situation proposée. Dans cette activité, comme nous l'avons dit, le rôle de l'identification des invariants, ou des propriétés caractéristiques (points fixes, …), est prépondérant ; cela permettrait de revisiter les apprentissages du Collège sous un autre angle. Cet apprentissage direct des transformations en tant que outil exigible au Lycée peut être envisagé dans la mesure où l'approche descriptive de leurs actions a été initiée et pratiquée au Primaire et au Collège, et où les objets, les configurations élémentaires de la géométrie constituent un stock de configurations connues, que ces configurations ont été comprises, mémorisées, activables, et avec elles leurs invariants.

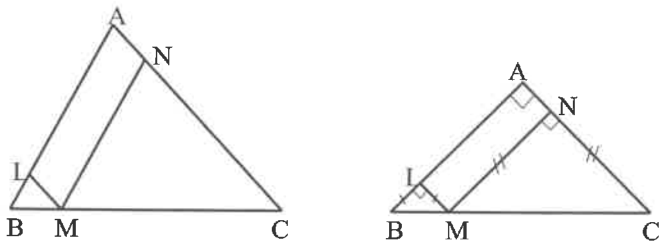
Cet apprentissage doit permettre de faire le lien entre diverses configurations, et de plus, de pouvoir concevoir des cas particuliers comme des cas génériques ; ce qui

(3) La raison du choix de l'affinité comme transformation pour les exemples donnés dans ce texte est de montrer l'intérêt d'une transformation oubliée, transformation qui transforme une figure (elle ne la déplace pas seulement), mais pas trop !

donne une autre raison de connaître ces cas particuliers et leurs propriétés. Cette démarche est une démarche pouvant être rapprochée, bien qu'elle soit différente dans son concept, de celles qui étaient proposées au Moyen Âge pour la résolution de situations arithmétiques, ou la résolution des équations algébriques : on donnait des résolutions de problèmes particuliers. L'algorithme proposé pouvait être reproduit et permettait de résoudre toute une classe de problèmes.

La démarche qui permet d'utiliser un cas particulier pour un cas générique n'étant pas usuelle, je donne deux autres exemples pour expliciter mes propos :

Exemple 4 : Un point M étant pris sur le côté BC d'un triangle ABC, on trace les parallèles MN et ML aux côtés AC et AB. On définit ainsi un parallélogramme ANML. Déterminer la position du point M pour que l'aire de ce parallélogramme soit maximum.



Par affinité on peut supposer que le triangle ABC est rectangle isocèle : le parallélogramme ANML est un rectangle à périmètre constant égal à AB + AC. Son aire est maximum lorsque c'est un carré, c'est-à-dire lorsque le point M est le milieu de BC.

Exemple 5 : Inscrire dans une ellipse un quadrilatère d'aire maximum.

Par affinité on peut se ramener à un cercle. Le quadrilatère d'aire maximum inscrit dans un cercle est un carré. Par suite un quadrilatère d'aire maximum inscrit dans une ellipse est l'affine d'un tel carré : c'est un parallélogramme ayant ses diagonales conjuguées (c'est-à-dire les diagonales sont images de directions perpendiculaires).

Cet apprentissage devrait être complété par des activités mettant en jeu la composition ou la décomposition des transformations en un produit de transformations. Ce dernier point pouvant s'initier en étudiant l'ensemble d'un certain type de transformations (par exemple les isométries) conservant une configuration donnée ; on approcherait ainsi le concept de groupe.

Pour terminer ces quelques lignes, je dirai que la disparition des programmes du secondaire des transformations que sont l'affinité et l'inversion est dommageable : ce sont des transformations qui transforment(4)... Ceci d'autant plus que l'affinité est

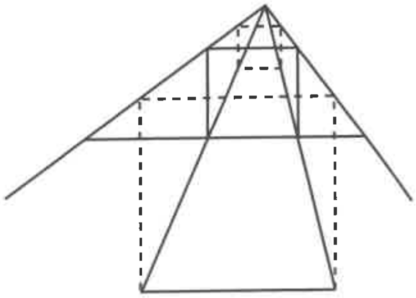
(4) Si on ne se restreint pas à la géométrie plane, il en est de même des projections d'un plan sur un autre. À titre d'exemple, elles permettent de ramener le théorème de Pascal sur une conique à celui d'un cercle.

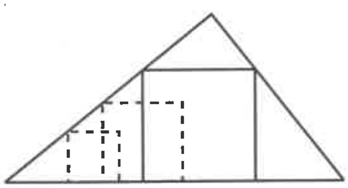
une transformation d'apprentissage relativement aisé, qui pourrait être introduite dès la classe de seconde ou plus tôt, et qui par son utilisation pourrait montrer aux élèves tout l'intérêt des transformations. De surcroît, c'est une transformation qui permet d'expliquer la dynamique des aires par déformations de la figure initiale, et l'invariant qu'est le rapport d'aires.

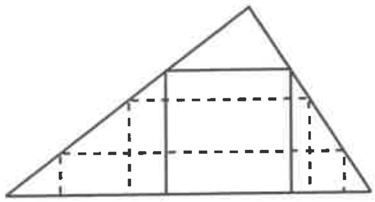
Avec l'apport des nouvelles technologies, il est facilitant de demander à un enseignement de géométrie, que l'élève fasse varier des paramètres, ou relâche certaines contraintes dans les activités et les problèmes qui lui sont proposés. Il lui faudra alors établir le pont entre la famille des objets ayant moins de contraintes et l'objet désiré avec toutes ses contraintes. Ce faisant il concevra aisément que le choix des contraintes abandonnées n'est pas neutre.

À titre d'exemples d'utilisation d'un logiciel interactif de géométrie, signalons l'article « Les tribulations d'un pentagone » où on essaie de comprendre les pentagones ayant quatre couples diagonale-côté opposé parallèles en utilisant les principes des systèmes articulés, les exercices classiques consistant à inscrire un carré dans un triangle, ou tracer une circonférence passant par un point et tangente à deux droites données.

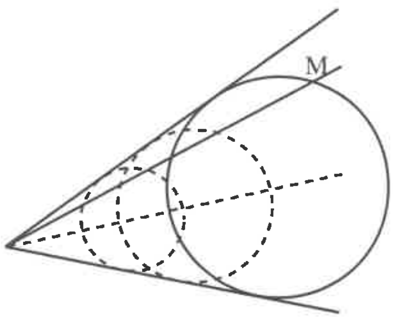
Dans un premier exercice, on construit un carré avec un côté parallèle à un côté du triangle et les deux autres sommets sur les deux autres côtés, ou un carré ayant un côté posé sur un côté du triangle et un autre sommet sur un de des deux autres côtés, une autre solution pouvant être d'inscrire un rectangle dans le triangle.







Dans un second exercice, on trace un cercle tangent aux deux droites (son centre est sur la bissectrice de l'angle formé par ces deux droites). La variation des objets construits que l'on obtient en faisant varier le point libre sur lequel ils sont définis, permet de voir en continu la famille des objets ayant cette même propriété, et donc d'approcher celui cherché pour le construire. Dans cette recherche la fonction « lieu » peut s'avérer d'une grande utilité.



Ces activités obligent à repenser le lien entre les transformations isométries, similitudes, et le mouvement pour pouvoir passer de l'objet construit à celui que l'on veut construire ou étudier.

En conclusion, si on veut axer l'apprentissage de la géométrie sur le programme d'Erlangen, il faut construire un programme pour réussir cet apprentissage. C'est-à-dire bâtir une progression pour permettre à l'élève d'acquérir une autonomie, une liberté ; ou, comme dit Hadamard, que « *l'élève soit capable de construire par lui-même des raisonnements, des démonstrations de théorèmes ou des solutions de problèmes* ».

BIBLIOGRAPHIE

M. Carral, R. Cuppens, *Les tribulations d'un pentagone*, Repères n° 12, juillet 93.

J. Hadamard, *Leçon de géométrie élémentaire*, vol. 1, note A, sur la méthode en géométrie, 1917, Armand Colin.

R. Thom, *Prédire n'est pas expliquer*, Entretiens avec Émile Noël, 1991, Flammarion.