

Figures et géométrie

Rémi Langevin(*)

Demandez à quelqu'un au hasard ce que fait un mathématicien, on vous répondra « il fait des calculs », « il écrit des formules » ; jamais : « il dessine ». Certes, des articles de recherche, même en géométrie, peuvent être écrits sans figures. On peut aussi enseigner la géométrie en s'appuyant sur la construction des nombres et l'algèbre linéaire. Je souhaite promouvoir ici une approche visuelle de la géométrie. Commençons donc par des figures. Elles sont rassemblées par chapitres, en suivant le même plan que le texte qui les commente.

I. Description

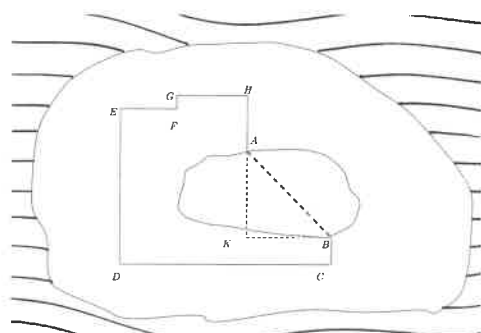


Figure I.1. Comment creuser un tunnel sous une montagne (entre A et B) : la solution utilisée à Samos.

Série 2 : perspective

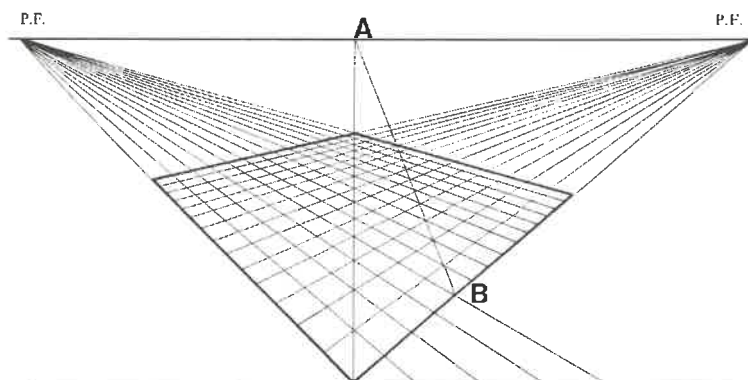


Figure I.2.1. Quadrillage en perspective.

(*) Université de Bourgogne.



Figure I.2.2. Une rue.

Série 3 : coniques

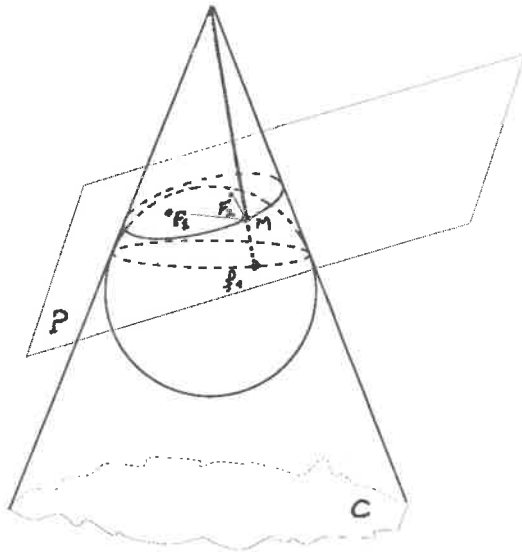


Figure I.3.1. Ellipse et construction d'un foyer.

$M \in E = P \cap C$.

F_1 point de contact entre P et une sphère S_1 tangente au cône C .

Les droites MF_1 et Mf_1 sont tangentes à S_1 , donc $|MF_1| = |Mf_1|$.

En procédant de même avec la deuxième sphère S_2 tangente à P et C , on peut conclure :

$$|MF_1| + |MF_2| = |Mf_1| + |Mf_2| = c^{te}.$$

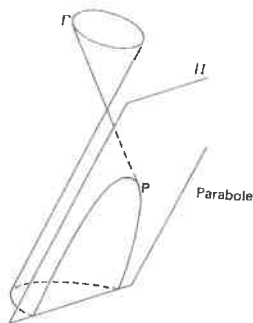


Figure I.3.2. Parabole.

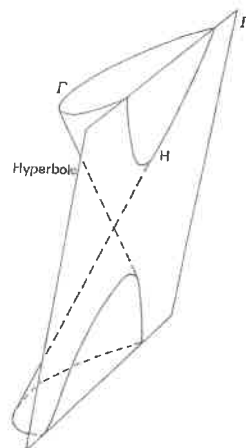


Figure I.3.3. Hyperbole.



Figure I.5. Drapés : Portrait de chevalier d'après Carpaccio.

Série 4 : lignes de niveau

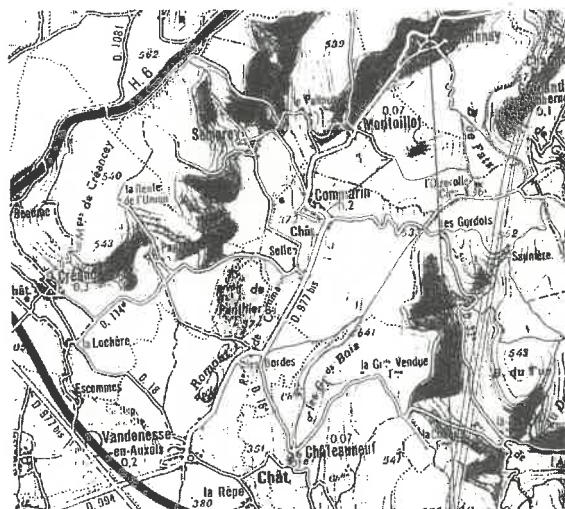
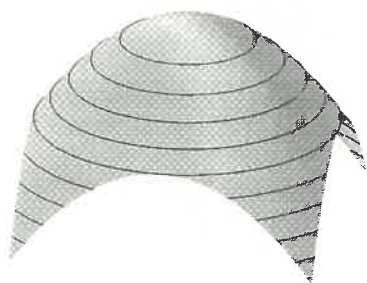
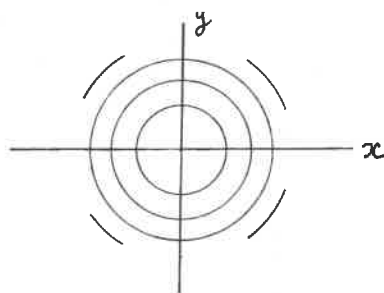
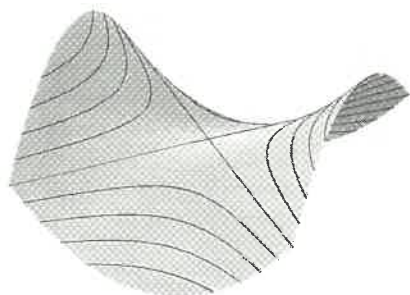
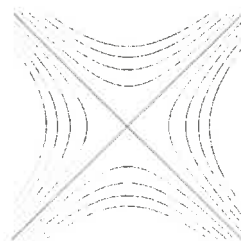


Figure I.4.1. Lignes de niveau sur une carte.

Figure I.4.2.a. Surface $z = -x^2 - y^2$.Figure I.4.2.b. Niveaux de $-x^2 - y^2$.Figure I.4.3.a. Surface $z = y^2 - x^2$.Figure I.4.3.b. Niveaux de $y^2 - x^2$.

II. Mouvement.



Figure II.1. La trace d'un mouvement (Kandinsky).

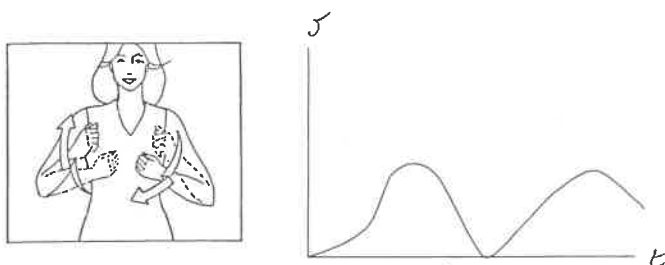


Figure II.2. Voiture en langue des signes des villes brésiliennes.
(à droite la vitesse du mouvement)

III. Métriques, isométries.

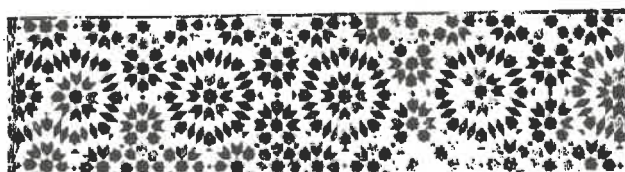


Figure III.1. Frise.



Figure III.2. Frise.

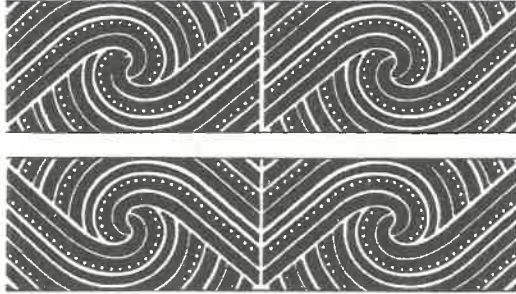


Figure III.3.

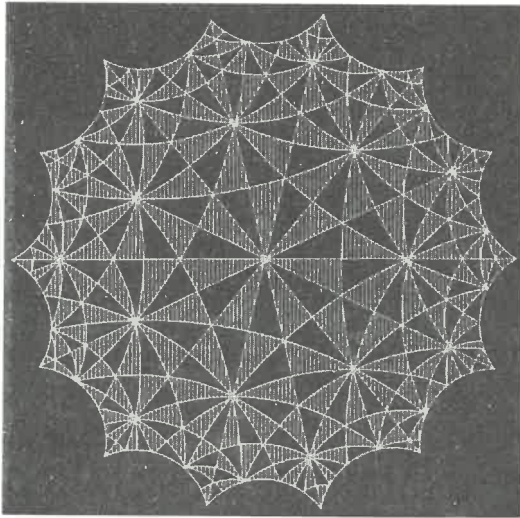


Figure III.4. Triangles hyperboliques.

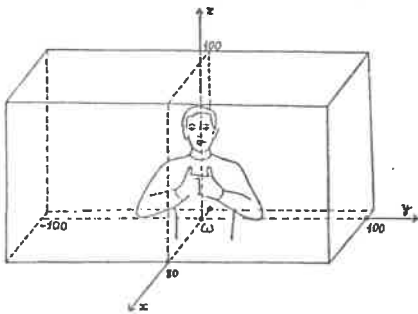


Figure III.5. Repère lié au corps.

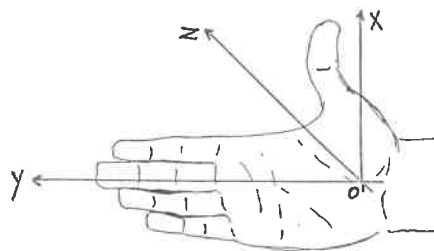
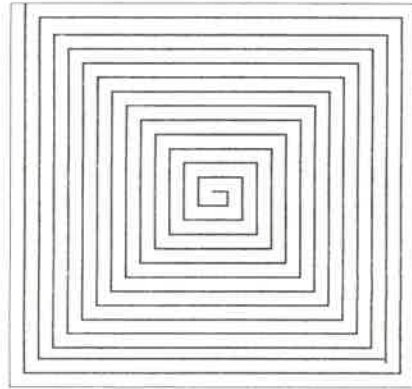


Figure III.6. Repère lié à la main.

IV. Dimensions.



Si le carré avait 1m de coté, la bande indiquée ferait déjà au moins une vingtaine de mètres ...

Figure IV.1. Faute de peau de buffle...

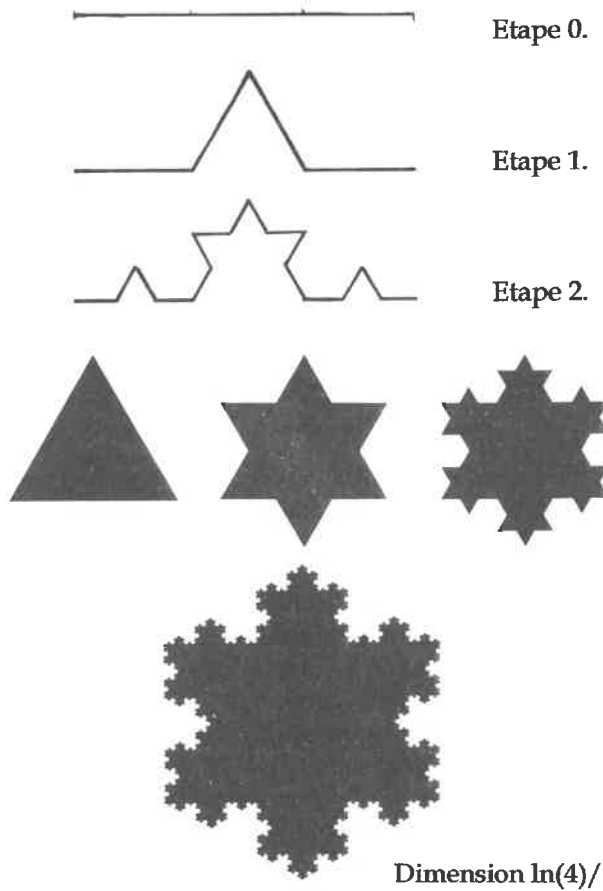


Figure IV.2. L'île de von Koch.

V. Topologie.

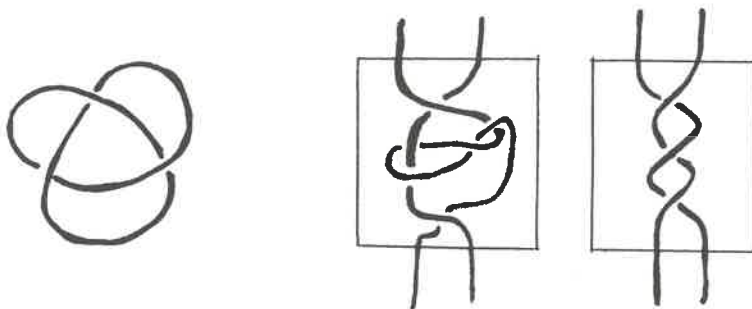


Figure V.1. Nœud trèfle et « puces » (tangle) de Conway.

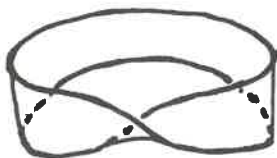


Figure V.2. Ruban de Möbius.

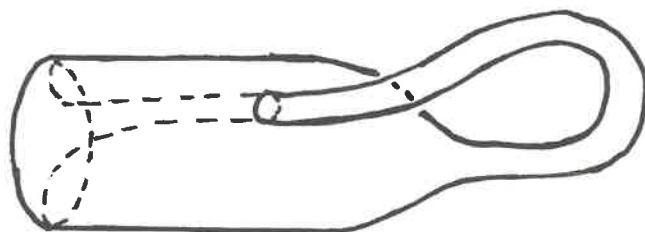


Figure V.3. Bouteille de Klein.

Certaines de ces figures sont des clichés et évoquent des thèmes précis, au moins pour ceux qui étudiaient au lycée avant les années soixante-dix. D'autres viennent de la peinture ou de la vie courante.

Pourtant la constatation que nombre de propriétés géométriques se réduisent à quelques relations algébriques simples fait dire à N. Bourbaki (dans ses *Éléments d'histoire des mathématiques*) que la géométrie élémentaire est morte : « *Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants qui parvient enfin à formuler des méthodes générales [...] ; victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la théorie classique des invariants elle-même et de la géométrie "élémentaire", qui en est devenue pratiquement un simple dictionnaire. Sans doute, rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi dérouler à volonté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans un langage géométrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux résultats classiques, et il reste là un domaine restreint où continuent*

à s'exercer avec bonheur de nombreux amateurs (géométrie du triangle, du tétraèdre, des courbes et surfaces algébriques de bas degré, etc). Mais pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie... »

Cela a peut-être incité certains promoteurs de la réforme des « mathématiques modernes » à préparer l'enterrement de la géométrie en l'algebrisant à outrance. Le risque est de ne laisser aux débutants et aux utilisateurs des mathématiques que la possibilité d'admirer une construction axiomatique en laissant le choix des meilleurs axiomes à des spécialistes. Pourtant...

1. Description.

Pourtant, depuis plusieurs milliers d'années, la construction d'images, de plans et de figures mêle observation, utilisation de conventions dépendant de l'époque et du lieu, imagination et réflexion.

Il y a 2 500 ans, à Samos, Eupalinos souhaitait simplement résoudre un problème d'ingénieur : creuser un tunnel à travers le mont Castro pour amener de l'eau. Le point d'entrée, mais aussi le point de sortie du tunnel étaient imposés. La solution est contenue dans la figure I.1 (extraite, la mer en plus, du livre d'Elon Lima [Li1]). Le tunnel existe encore.

Environ deux mille ans plus tard apparurent en Europe la perspective et le repérage cartésien de l'espace.

Les perspectives sont des conventions. Qui possède un unique œil ponctuel à distance finie, ou mieux à l'infini ? Elles proposent cependant un code lisible permettant de garder sur un plan une information spatiale. Le chemin du dessin à la géométrie analytique ne sera pas très long.

La géométrie descriptive de Monge, qui utilise des projections sur deux plans orthogonaux est une autre convention. Il remarquait que : « *Déduire de la description exacte des corps tout ce qui suit nécessairement de leur formes et de leurs positions respectives* » conduit à des raisonnements mathématiques non triviaux. La motivation pratique de Monge, en fait la formation d'ingénieurs, n'empêchait pas les développements théoriques mais garantissait le retour permanent à des objets que l'on pourrait fabriquer. Ce va-et-vient est nécessaire pour que le sujet ne se réduise pas à une suite de recettes.

Les figures de la série « coniques » (I.3.1, I.3.2, I.3.3) sont classiques. Déjà au deuxième siècle avant Jésus-Christ, Apollonius savait qu'en coupant un cône de révolution par des plans on obtient une famille de courbes planes remarquables. Après l'optique, la mécanique classique en a, depuis Kepler, souligné l'importance. Remarquons que de leur construction géométrique on peut déjà extraire de l'information (construction des foyers comme points de contact du plan de section et d'une sphère tangente au cône) ; obtenir la position des foyers par voie analytique nécessite des calculs un peu longs.

Apparemment encore statique, la construction de lignes de niveau sur un plan affine la perception d'un relief. Cependant, imaginer une suite de sections de hauteur croissante aide à reconstruire mentalement un volume. Du raisonnement sur les lignes de niveau à la définition du gradient, à l'observation du comportement local

d'une fonction du type $z = -x^2 \pm y^2$, puis à l'étude de la dynamique déterminée par un champ dérivant d'un potentiel, la distance n'est pas si grande. (Fig. I.4.1, I.4.2, I.4.3).

Le dessin d'un drapé, d'un corps, est lui aussi statique, toutefois les notions mathématiques sous-jacentes : points critiques, contours apparents ne sont actuellement pas considérées comme élémentaires. Pourtant il n'est pas si difficile d'expliquer que le même trait peut représenter le bord d'un disque ou le contour apparent d'une sphère (Fig. I.5.1).

La justification de la présence de points de rebroussement lorsque l'on projette une surface ou lorsque l'on observe des caustiques sur la surface du café dans un bol est plus délicate. J'ai entendu dire que René Thom y voyait le germe de sa théorie des singularités.

En conclusion de ce paragraphe, peut-être mieux intégrer l'observation des formes au cours de mathématiques rendrait service à de futurs architectes et à de futurs ingénieurs au moins autant que de savoir tracer le graphe d'une fonction dont l'expression algébrique est donnée.

II. Mouvement.

Déjà dans l'antiquité, la représentation par Ptolémée du mouvement des planètes impliquait une bonne compréhension de ce que nous appelons maintenant coordonnées sphériques. La précision de la description du mouvement des planètes obtenue en composant des mouvements circulaires et uniformes n'était pas encore dépassée en utilisant le modèle de Copernic.

En Europe, à partir de la Renaissance, la description cartésienne de l'espace est venue avec la compréhension de la mécanique, en particulier de la mécanique céleste. Peut-être fallait-il d'abord comprendre ce que veut dire fixe, ou en translation uniforme avant de percevoir le besoin d'un repérage systématique en trois dimensions à l'aide de trois coordonnées. Elles apparaissent explicitement dans les *Dialogues sur les systèmes du monde* [Gal] de Galilée :

Salviati : « ...Si donc vous fixez un point comme origine des mesures et, de ce point, vous faites partir une ligne droite qui détermine la première mesure, celle de la longueur, il faudra nécessairement que la droite qui détermine la largeur soit à angle droit avec la première. Celle qui déterminera la hauteur, qui est la troisième dimension, partira du point de rencontre des deux autres et formera avec elles non des angles obliques, mais droits... ».

C'est assez différent des mouvements simples d'Aristote, tels que les rappelle le même Salviati :

« le [mouvement] circulaire, qui se fait autour d'un centre, et le [mouvement] rectiligne qui se fait de bas en haut et de haut en bas, celui qui va vers le haut s'éloignant du centre et celui qui va vers le bas en se rapprochant du centre... »

De façon plus terre à terre, la notion de solide aurait-elle un intérêt, si l'on ne pouvait déplacer un solide ? Ce n'est pas un hasard si le repérage dans l'espace, et le passage d'un repère à l'autre sont naturels pour des sourds-muets qui pratiquent une langue de signes. Le passage d'un repère attaché à leur main à un repère attaché à

leur corps est partie intégrante de ces langues de signes. Souvent le mouvement effectué lors de l'exécution d'un signe est facile à expliciter lorsque la position initiale du repère mobile lié à la main est convenablement décrite.

Le mouvement est bien sûr implicite dans la définition de la tangente, inséparable de la vitesse d'un point en mouvement.

Kandinsky n'était pas mathématicien et pourtant il écrivait : « *la ligne géométrique est un être invisible, elle est la trace du point en mouvement donc son produit* » [Kan] (la figure II.1 est extraite de [Kan]).

Il n'y a pas que les points qui bougent. Le mouvement d'un solide, la main à laquelle on donne une forme fixe au cours du signe permet aussi de s'exprimer. C'est aussi pratique que les sons (voir figure II.2).

III. Métriques, isométries.

Pour des mathématiciens, faire de la géométrie ne s'arrête pas à la contemplation de figures, il faut les comparer, les transformer. Cette méthode est systématisée dans le programme d'Erlangen, écrit par F. Klein : une géométrie est le couple formé d'un espace et d'un groupe de transformations qui opère sur cet espace.

Ici encore, le dessin permet d'évoquer un groupe en observant l'action de ses éléments sur une figure. La frise en carrelage (Palais du calife, Tetuan, figure III.1) est associée au groupe Z . Le dessin de la frise peut être obtenu en roulant sur un plan un sceau cylindrique enduit d'encre. Si nous imaginons un motif répété aussi dans la direction verticale, il faudrait rouler dans deux directions un tore. Nous allons de la géométrie visuelle vers la construction de surfaces abstraites.

Les logiciels de géométrie actuels (Cabri-géomètre, etc...) rendent facile la représentation d'actions de groupes d'isométries euclidiennes sur le plan.

De plus la démarche qui commence par l'observation, puis, comme à l'Alhambra, tente d'obtenir tous les pavages du plan possibles, et enfin seulement démontre que la liste est complète et dégage la structure sous-jacente est à l'opposé de l'admiration d'une théorie close.

Le dessin de la figure III.4 évoque immédiatement pour les mathématiciens la géométrie hyperbolique. La croissance exponentielle du volume dans le plan hyperbolique y est aussi perceptible.

On peut même se déplacer dans un groupe d'isométries. Ou, ce qui revient au même, suivre la position d'un repère orthonormé par rapport à un autre. Nous voilà prêts à commencer à apprendre une langue de signes (figures III.5 et III.6).

IV. Dimension.

1, 2, 3 ; ce sont les dimensions usuelles, les seules qu'Aristote acceptait de concevoir [Ar]. Pour dessiner en dimension 4, il faut un peu plus d'habileté (il en faut aussi pour interpréter les dessins). En effet on perd deux dimensions lorsque l'on projette un cube de l'espace de dimension 4 sur un plan.

La couleur peut aider à concevoir une quatrième dimension. De fait, la figure V.3 représente une surface sans points doubles dans \mathbb{R}^4 , la bouteille de Klein, qui est projetée sur un espace de dimension trois. Cette projection a un cercle de points doubles. Pour évacuer ces points doubles vous pouvez l'imaginer colorée de sorte

que le « col » soit indigo tandis que le milieu du corps de la bouteille est rouge ; un dégradé permet de compléter la figure. La quatrième dimension pourrait être la longueur d'onde de la couleur.

D'autres figures symbolisent des dimensions non entières, maintenant à la mode. La dimension de ces figures très régulières est définie de la manière suivante : La figure est à « peu de chose » près la réunion de N figures semblables dans un rapport r . La dimension de la figure est alors par définition le nombre d solution de : $N = (1/r)^d$. La figure IV.2 montre comment construire une courbe de dimension $d = \ln(4)/\ln(3)$.

Remarquons que la solution de l'équation ci-dessus est la dimension usuelle lorsque la figure est un segment, un carré, un triangle équilatéral, un cube. On retrouve en effet $4 = (1/(1/2))^2$ pour le carré et le triangle équilatéral divisé en quatre morceaux deux fois plus petits, $8 = (1/(1/2))^3$ pour un cube divisé en 8 cubes deux fois plus petits, $27 = (1/(1/3))^3$ pour un cube divisé en 27 petits cubes trois fois plus petits.

Bien sûr, les mathématiciens ont ensuite abondamment généralisé et utilisé des dimensions non nécessairement entières (ou fractales en utilisant le mot inventé par Mandelbrot).

La dimension est naturellement associée à la mesure. La légende de la reine Didon explique la différence entre une aire et une longueur. Avec une peau de buffle découpée en une fine lanière la reine réussit à entourer une surface suffisante pour construire une ville ! La figure IV.1 se contente de découper un rectangle. Nous apprenons dès l'école primaire la différence entre mètres, mètres carrés et mètres cubes. Indiquer comment remplir avec des carrés ou des cubes un domaine du plan ou de l'espace est accessible dès la fin du lycée, c'est ce que fait E. Lima dans son livre [Li2].

V. Topologie.

On trouve des représentations du nœud trèfle sur des lampes à huile dans un musée crétois. Les nœuds et entrelacs sont des motifs qui ont fasciné depuis longtemps les hommes de civilisations très différentes. La théorie des nœuds a au cours de ce dernier siècle connu des développements impressionnants. Après une approche « botanique », tenter d'établir une table donnant des listes de nœuds différents, c'est à dire ne pouvant être déformés sans couper le fil l'un dans l'autre, une autre idée très visuelle, la composition de « puces » de Conway (figure V.1) permet à la fois de déterminer des invariants permettant de distinguer des nœuds et d'en engendrer de manière un peu systématique.

Peut-être avez-vous déjà vu l'une des figures du paragraphe V. Topologie. Le ruban de Möbius (figure V.2) permet un tour de prestidigitation : couper le ruban par la moitié dans toute sa longueur sans le couper en deux. Plus sérieusement c'est un exemple simple de surface non orientable. Cela permet de réfléchir une fois de plus sur les cas d'égalité des triangles (a-t-on « le droit » de retourner le plan, oui ou non...).

Encore une fois on observe, puis on dégage des propriétés de plus en plus « robustes », qui persistent même si l'on déforme la figure.

Par ces quelques exemples, j'ai voulu montrer que des figures, les réflexions qu'elles peuvent susciter, résumées, expliquent, motivent des théories importantes pour les mathématiciens et utiles pour d'autres.

Bibliographie

- [Ac] Marcia Ascher. *Mathématiques d'ailleurs* (traduction Seuil, 1988).
- [APM] Dossier Géométrie. *Bulletins de l'APMEP* n°s 430 et 431.
- [Ar] Aristote. *Du ciel*.
- [As] Francisco Asina. *Comment dessiner au crayon*. Éditions de Vecchi, 1987.
- [Be] Daniel Bennequin. *Caustique mystique d'après Arnold et al.* Séminaire Bourbaki, nov. 1984, exposé 634, vol. 1984-1985.
- [Cab] Cabri-Géomètre. Logiciel de géométrie, Laboratoire Leibniz, Grenoble.
- [CREM] Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. *Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement*, 1999.
- [Fig] *La figure et l'espace*. Actes d'un colloque de la Commission Inter-IREM « Épistémologie et Histoire des Mathématiques » (1993). Éd.-Diffuseur : IREM de Lyon (cf. *Bulletin APMEP* n° 393, p. 217-219).
- [Gal] Galilée. *Opere di Galileo Galilei*, édité par A.Favaro chez C. Barbera, Florence, 1890-1909, nouvelle édition en 1964, amplement cité en français dans : R. Zouckerman. *Galilée penseur libre*, Édition de l'union rationaliste, 1968.
- [IGN] Institut Géographique National. *Carte touristique no 28 au 1:100 000*, 1980.
- [Kan] Kandinsky. *Punkt und Linie zu Fläche* (1926). Traduction française : *Point et ligne sur plan*. Denoël, 1970.
- [Kle] F. Klein. *Programme de Erlangen* (1872). Traduction dans la collection « le discours de la méthode » Gauthier Villars, 1969.
- [Li1] E.Lima. *Meu Professor de Matematica* (Mon professeur de mathématiques, en portugais). Collection du professeur de mathématiques, société mathématique brésilienne.
- [Li2] E.Lima. *Medida e forma em geometria* (Mesure et forme en géométrie). Collection du professeur de mathématiques, société mathématique brésilienne.
- [Mon] G.Monge. *Géométrie descriptive*, cours de l'école polytechnique. Réédition Jacques Gabay, 1989.
- [Pro] *Problèmes de géométrie : rôle de la figure*. Actes du colloque Inter-IREM de géométrie (1996). Éd.-Diffuseur : IREM d'Aquitaine (cf. *Bulletin APMEP* n° 413, p. 804-805).
- [Rou] N.Rouche. *De la Géométrie aux potaches et réciproquement*. Exposé au séminaire CREM-GEPEMA-UREM à l'Université de Mons (janv. 2000)
- [Va] Francesco Valcanova. *Carpaccio*. Edition Scala, Florence, 1989.