Angles et rapporteur en classe de sixième

Monique Maze

Résumé : Le programme de sixième précise que « le rapporteur est un nouvel instrument de mesure qu'il convient d'introduire à l'occasion de la construction et de l'étude de figures ». Pour ce faire, il nous a semblé pertinent de repérer les difficultés d'appropriation du système symbolique mis en œuvre dans cet instrument afin de proposer des séquences au cours desquelles les élèves vont évoluer pour construire des connaissances et des compétences qui leur permettront d'utiliser à bon escient ce nouvel instrument. Nous analysons le comportement des élèves en établissant un parallèle avec les travaux de G. Vergnaud sur la droite numérique.

Dans son étude sur les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant, G. Vergnaud montre que l'analyse des contenus de connaissance est un élément essentiel pour comprendre les conceptions et les compétences des enfants et pour en décrire les évolutions. Il choisit deux exemples : le volume et la droite numérique. C'est en reprenant cette dernière étude que nous avons essayé de repérer les difficultés liées à l'usage du rapporteur. En effet, tout comme pour la droite numérique, il y a nécessité d'appropriation d'un système symbolique qui paraît transparent à l'adulte mais qui, pour l'enfant, ne va pas de soi. Pour illustrer ce point de vue, nous rapportons d'abord des activités proposées dans une classe de sixième puis nous analyserons les comportements des élèves en établissant un parallèle avec les travaux de G. Vergnaud parus dans Psychologie – Encyclopédie de la Pléiade – Gallimard – p. 841...

I. Activités proposées

Savoir-faire et savoir prérequis à toutes les activités :
Pliage d'une feuille de papier en quatre qui, dépliée, laisse apparaître deux droites perpendiculaires.
Deux droites perpendiculaires déterminent quatre angles droits, un seul est codé.
Une feuille ainsi pliée donne un angle droit et peut remplacer l'équerre.

1. Reproduction d'un carré

a) matériel :
– *du professeur :* un carré α de 5 cm de côté dessiné sur papier calque (éventuellement en plusieurs exemplaires),
– *des élèves :* une feuille de papier uni, règle graduée, compas, équerre ou papier plié en quatre.

b) savoir pré requis :
Définition du carré : un carré est un quadrilatère qui a quatre angles droits et quatre

côtés de même longueur.

c) déroulement et remarques

La consigne suivante est donnée oralement par le professeur

« J'ai construit ce carré – le professeur montre le carré – demandez-moi, par écrit, sur votre feuille, le minimum de renseignements pour pouvoir construire un carré superposable à ce carré ».

Les élèves travaillent seuls ou par groupes de quatre mais, dans tous les cas, chaque élève doit écrire sur sa feuille la demande faite au professeur ainsi que la réponse que le professeur a écrit. Les élèves construisent et la validation est faite par superposition avec l'un des calques du professeur.

Le professeur exige un vocabulaire exact et, selon les élèves, une formulation plus ou moins rigoureuse.

Les élèves demandent bien sûr la longueur du côté, mais parfois le périmètre, l'aire et d'autres encore le nombre de côtés, la longueur et la largeur, s'il a des angles droits...

Après quelques va-et-vient, les élèves réussissent tous ce premier exercice.

Pour les plus rapides, le professeur peut proposer, en aparté, de formuler une autre demande, différente de la première, pour obtenir le carré β dont les diagonales mesurent 8 cm.

2. Reproduction d'un losange

a) matériel

– *du professeur* des losanges de 5 cm de côté sur papier calque, (éventuellement en plusieurs exemplaires)

nom du losange	mesure d'un angle du losange en degrés	en fractions d'angle droit
γ	67,5	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
Ω	135	$1+\frac{1}{2}$
μ	75	$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$
δ	150	$1+\frac{2}{3}$
η	52,5	$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$
ε	120	$1+\frac{1}{3}$

des élèves le même que pour le carré et deux ou trois disques de rayons différents découpés dans du papier, les rayons des disques sont compris entre 2,5 cm et 5 cm.

b) prérequis

Définition du losange Un losange est un quadrilatère qui a quatre côtés de même longueur.
Construction d'un losange avec le compas.

c) déroulement et remarques

La consigne, donnée oralement, laisse à penser aux élèves que l'exercice est semblable au premier , cependant, le professeur ne montre pas le losange, on va voir pourquoi !
La consigne est la suivante « J'ai dessiné un losange, demandez-moi le minimum de renseignements pour pouvoir construire un losange superposable ».

La plupart des élèves demandent la longueur d'un côté et construisent alors un losange soit avec un angle quelconque, soit un « double triangle équilatéral ».
Pour tout losange proposé, le professeur, grâce à sa collection, objecte un losange « très différent ».
Certains élèves refont un essai à vue d'œil, d'autres demandent la longueur d'une diagonale, mais le professeur répond qu'il ne la connaît pas.

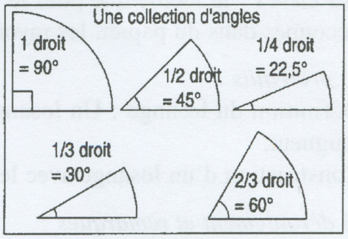
À ce moment-là, le professeur doit être attentif pour, d'une part, ne pas laisser les élèves s'enferrer dans une vaine recherche et, d'autre part, laisser à tous le temps de s'approprier le problème. Il va être ainsi à l'affût de réactions telles que « C'est impossible ! » ou « Vous trichez ! » pour mettre un terme à la recherche individuelle ou en petits groupes de quatre pour engager un débat avec toute la classe.

La première question qu'il pose est la suivante
« Pourquoi était-ce si facile avec le carré et pas avec le losange ? »
La présence de l'angle droit pour le carré est reconnue par tous, et des gestes montrent que, pour le losange, l'angle est plus ou moins grand.

La deuxième question porte sur cet angle
« Pourrait-on comparer cet angle du losange à l'angle droit ? »
Le professeur qui n'attend pas vraiment de réponse utilise la mémoire de la classe. En début d'année, les élèves ont plié en deux, en trois, ou en quatre des « u-longueurs », petites bandelettes de papier de 6 cm de long, pour mesurer des segments il s'agissait d'un travail sur les fractions réalisé après lecture du travail de R. Douady.
Il propose donc de plier l'angle droit pour fabriquer de nouveaux angles.

Chaque élève plie et coupe l'un de ses disques en quatre quarts, c'est à dire obtient quatre angles droits. Il en garde un et échange les trois autres avec les trois membres de son groupe.
Éventuellement, le professeur intervient avec quelques quarts de disques afin que chaque élève ait au moins trois angles droits provenant de trois disques de rayons différents pour rappeler que la longueur des « côtés-papier » n'est pas une caractéristique de l'angle droit.

Ce minimum de trois angles droits permet de constituer la collection ci-contre.

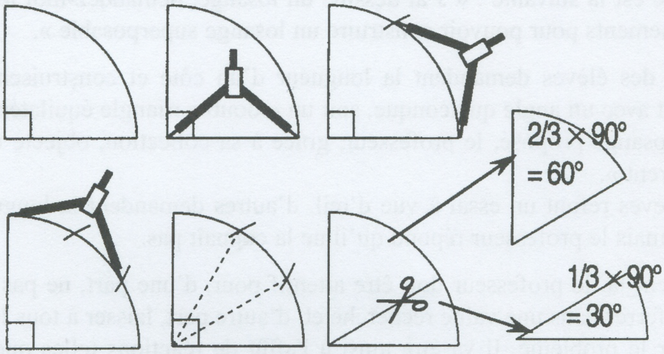


Avec le premier qui reste entier 1 angle droit = 90° ou 1 droit = 90° ou encore 1 dt = 90°

Avec le deuxième qui est coupé en deux demi-angles droits 1/2 angle droit = 45° ou 1/2 droit = 45° et 1/4 angle droit = 22,5° ou 1/4 droit = 22,5° en coupant en deux un des demi-angles droits.

Avec le troisième, 1/3 angle droit = 30° ou 1/3 droit = 30°

Et 2/3 droit = 60°, comme le montre le découpage



Sur chacun des cinq gabarits ainsi obtenus, l'angle est inscrit en fraction d'angle droit et en degrés.

Il sera encore souligné que, quel que soit le rayon du disque initial, pour les gabarits du groupe ou de la classe marqués 1/2 droit = 45° par exemple, c'est l'angle 45° qui est un invariant, les morceaux de papier ne sont pas superposables mais les angles le sont !

Dès que les élèves possèdent les premiers gabarits, le professeur peut relancer les élèves sur la construction du losange en indiquant que l'angle du losange mesure 67,5° Comme 67,5° = 45° + 22,5° ou, autrement dit, 67,5° = 1/2 droit + 1/4 droit, les élèves vont pouvoir construire le losange demandé.

Cette première construction est l'objet de l'institutionnalisation d'un savoir-faire sur l'addition des angles – à noter que le vocabulaire d'angles adjacents ne figure pas au programme de Sixième.

Vont suivre, en alternance, des exercices de mesure et de construction d'angle (annexe 1). Précisons au passage que les angles aigus apparaissent souvent comme issus du pliage d'un angle droit, donc plus petits, alors que les angles obtus apparaissent le plus fréquemment comme sommes d'un angle droit et d'un angle aigu, donc plus grands qu'un angle droit.

Lorsque ces premiers exercices sont bien réussis, une fois encore, le professeur rappelle une activité conduite en début d'année, à savoir représenter les longueurs suivantes 1/3 u, 2/3 u, 3/3 u, 4/3 u, 5/3 u, 6/3 u, 7/3 u, sur une bande de papier d'environ 5 cm sur 21 cm. Il demande de représenter tous les nouveaux angles obtenus, par pliage de l'angle droit et par addition ou soustraction. Chaque élève reçoit pour ce faire une feuille d'environ 10 cm sur 15 cm.

Les différentes productions sont analysées dans le paragraphe suivant. Reprises par le professeur qui maintient le parallèle avec les graduations de la demi-droite en tiers, en quarts ou en dixièmes de « u-longueur », elles vont permettre de fabriquer avec du papier calque un instrument de mesure et de construction d'angles.

Des exercices choisis parmi les précédents sont proposés , l'élève peut vérifier seul s'il s'est bien approprié la graduation de cet instrument. Des échanges de calques entre élèves d'un même groupe peuvent être envisagés.

Après quelques mesures et constructions, le professeur propose d'observer de vrais rapporteurs au rétroprojecteur.
L'institutionnalisation porte sur l'analyse préalable de l'instrument et sur son utilisation ou savoir-faire.

Analyse préalable de l'instrument
chercher le sommet commun à tous les angles, le côté commun à tous les angles qui porte la graduation zéro et le sens de la graduation.

Utilisation de l'instrument, savoir-faire pour mesurer un angle ou construire un angle de mesure donnée
placer le sommet commun sur le sommet de l'angle,
placer le côté commun sur un côté de l'angle,
lire ou prendre la graduation qui coïncide avec le deuxième côté de l'angle.
Les élèves sont alors invités à acheter leur rapporteur personnel. Les mêmes exercices leur sont d'abord proposés pour leur permettre de bien connaître leur nouvel instrument.

II. Analyse du comportement des élèves

En observant les productions des élèves (annexes 2 et 3), on ne peut que pointer une analogie entre les difficultés rencontrées par les élèves avec la droite numérique et celles liées au rapporteur. Nous allons préciser ce parallèle entre les appropriations de ces deux systèmes.

1. Principe d'inclusion

G.Vergnaud distingue d'abord le principe d'inclusion des signifiants il souligne ainsi l'incapacité dans laquelle sont les élèves de représenter une donnée par un segment inclus dans un segment représentant une autre donnée.
« Cela est si vrai, écrit-il, qu'ils placent les segments bout à bout, jusque et y compris en utilisant une seconde ligne » (figure 2).
Pour dépasser cette difficulté, les enfants utilisent

– soit des segments différents superposés (figure 1),
– soit des segments emboîtés (figure 3).
Mais dans ce dernier cas, G.Vergnaud souligne que l'enfant veut obtenir des signifiants distincts pour des signifiés distincts, comme en témoignent, entre autres, les traits qui identifient sur la figure 3, chacune des données.

En observant les figures a, b, c et c′, on ne peut que relever une similitude dans les procédures utilisées par les élèves :
– la figure a, rencontrée seulement chez quelques élèves et très vite abandonnée, montre des signifiants distincts et disjoints,
– la figure b est une mise bout à bout, comme la figure 2. Les élèves ont construit des angles adjacents mais sans inclusion,
– les figures c et c', comme la figure 3, présentent un emboîtement et, là aussi, les élèves par des traits souvent de couleurs différentes indiquent des signifiants distincts pour des signifiés distincts,
– la figure d est à rapprocher de la figure 4, l'indication des valeurs est dans les angles. Cette désignation est parfois ambiguë, encore que, grâce à des couleurs et malgré le nombre de données, les élèves s'en sortent assez bien mais ils ne mettent pas en place une graduation.

2. Principe de ponctualisation

G.Vergnaud distingue alors le principe de ponctualisation. Pour savoir exactement quel segment représente la donnée 2/3 u , le codage qui consiste à indiquer l'origine commune 0 et à ponctualiser les données 1/3 u, 2/3 u et 3/3 u est certes la solution, mais comment associer un nombre à un point ? Un point n'est pas mesurable : « un point ça n'a pas de longueur », disent certains élèves.

Cette représentation n'est nullement transparente pour les enfants. Il en est de même avec le rapporteur : même si les élèves adoptent la disposition avec un côté commun pour tous les angles représentés, figure d, une étape reste encore à faire pour écrire la graduation. En effet, il reste le travail d'identification entre les angles ayant le côté commun, côté origine ou côté 0 et l'ensemble des demi-droites qui sont le deuxième côté de l'angle. Pourtant, seule cette identification permet d'associer un nombre à une demi-droite.

Ce travail nous semble tout à fait semblable à celui de la ponctualisation relevé par G.Vergnaud qui écrit : « seule l'identification des points et des distances à l'origine permet d'associer un nombre à un point ».
Ce travail est délicat et les opérations de pensée qui sont nécessaires pour le mener à bien ne peuvent être sous-estimées. G.Vergnaud rapporte : « le fait qu'on puisse observer des jeunes élèves reporter sur une feuille la graduation de son double-décimètre contribue à entretenir l'illusion qu'il s'agit pour lui de la même activité que pour l'adulte. Il n'en est évidemment rien ».

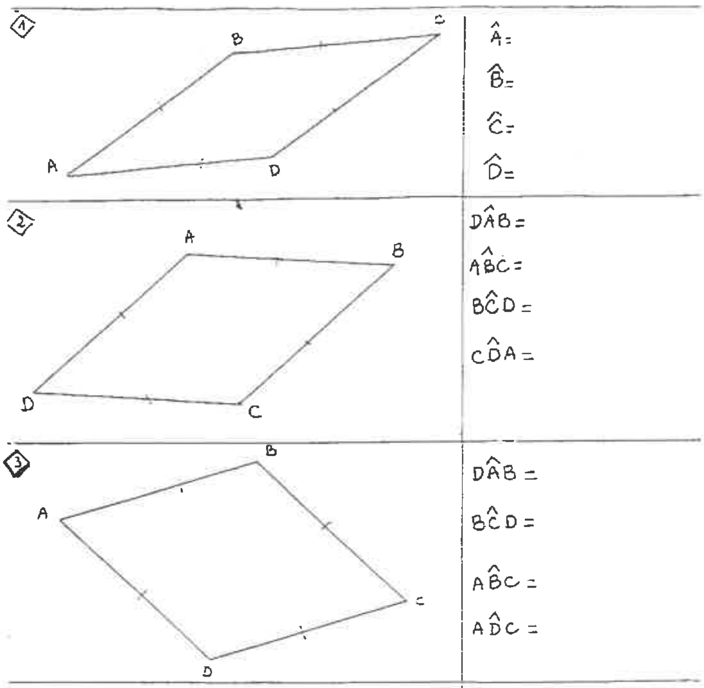
Par contre, les difficultés d'utilisation du rapporteur par les jeunes élèves au collège ne peuvent que confirmer qu'il y a là une difficulté certaine.

Si « ponctualiser un nombre » est une étape importante, alors identifier les mesures des angles avec les demi-droites l'est aussi. C'est une opération de pensée complexe qui échappe encore à nombre d'enfants de sixième et c'est sans surprise que l'on peut voir revenir les traits de rappel comme sur la figure f ou sur la figure 6.
Par contre, il n'y a aucune difficulté pour comprendre qu'un rapporteur n'a pas besoin d'être rond ! Il en est de même pour se rendre compte qu'il est impossible de représenter toutes les demi-droites à partir du sommet commun, ce serait, en effet, rendre irrepérable ce dernier !
Les doubles graduations, l'une dans le sens des aiguilles d'une montre et l'autre dans le sens inverse, sont également mieux acceptées et comprises.

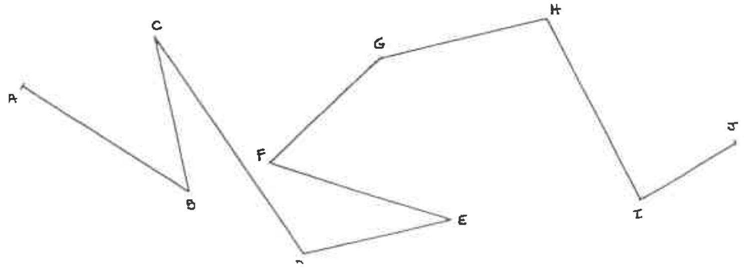
Nous pensons, par ces activités, avoir permis l'appropriation de ce système symbolique que représente la graduation du rapporteur, en rappelant toutefois qu'il s'agit d'un processus très difficile, non acquis par certains élèves en fin de sixième. Il nous semble que l'on ne peut faire l'économie de ces activités et qu'un mode d'emploi dirigé du rapporteur ne participe pas au développement de l'enfant car il ignore des difficultés signalées ci-dessus.

Annexe 1

I. Pour chaque losange ci-dessous, mesure les quatre angles. Donne tes réponses en fractions d'angle droit, puis en degrés.



II. Mesure les angles



III. Dans chaque ligne du tableau ci-dessous, on te donne la mesure des angles de sommets A et B d'un triangle ABC. Pour chaque ligne, tu dois construire un triangle, puis mesurer le troisième angle de ce triangle.

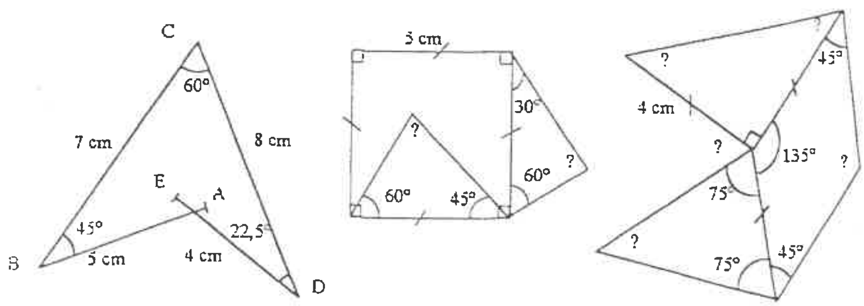
numéro du triangle	mesure en degrés de l'angle $\widehat{A}$	mesure en degrés de l'angle $\widehat{B}$	mesure en degrés de l'angle $\widehat{C}$
1	60	60	
2	45	45	
3	60	30	

IV.a. Construire le triangle isocèle ABC tel que $\widehat{A} = 112{,}5°$ et AB = AC = 5 cm.

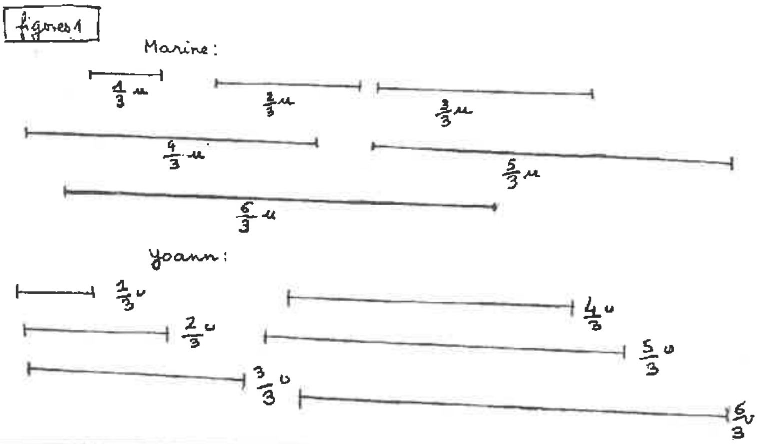
b. Construire le triangle isocèle ABC tel que $\widehat{A} = 82{,}5°$ et AB = AC = 5 cm.

c. Construire les triangles isocèles tels que les deux côtés de même longueur mesurent 5 cm et un angle mesure 52,5°.

V. Construis les figures données par les dessins à main levée. Mesure les angles marqués de « ? ».



Annexe 2


figures 1
Marine :
1/3 u
2/3 u
3/3 u
4/3 u
5/3 u
6/3 u
Yoann :
1/3 u
2/3 u
3/3 u
4/3 u
5/3 u
6/3 u

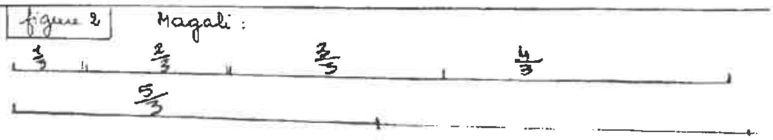


figure 2
Magali :
1/3
2/3
3/3
4/3
5/3

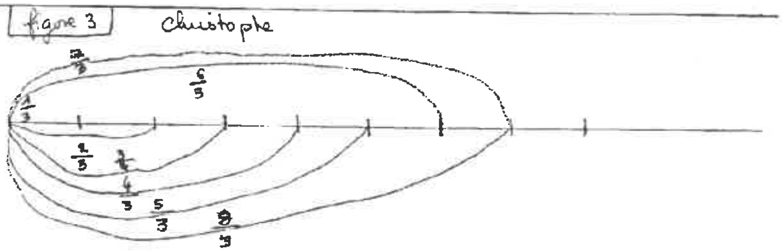


figure 3
Christophe
1/3
2/3
3/3
4/3
5/3
6/3
7/3
8/3

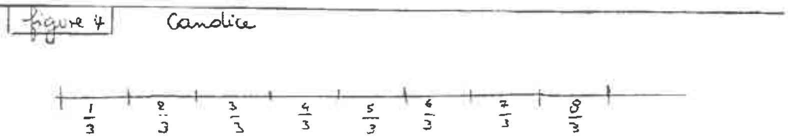


figure 4
Candice
1/3
2/3
3/3
4/3
5/3
6/3
7/3
8/3


figure 5
Vanessa
0
1/3
2/3
3/3
4/3
5/3
6/3
7/3
8/3

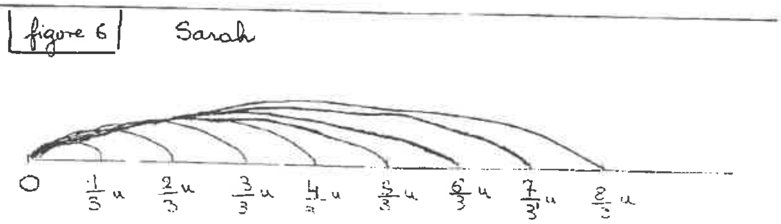


figure 6
Sarah
0
1/3 u
2/3 u
3/3 u
4/3 u
5/3 u
6/3 u
7/3 u
8/3 u

Annexe 3

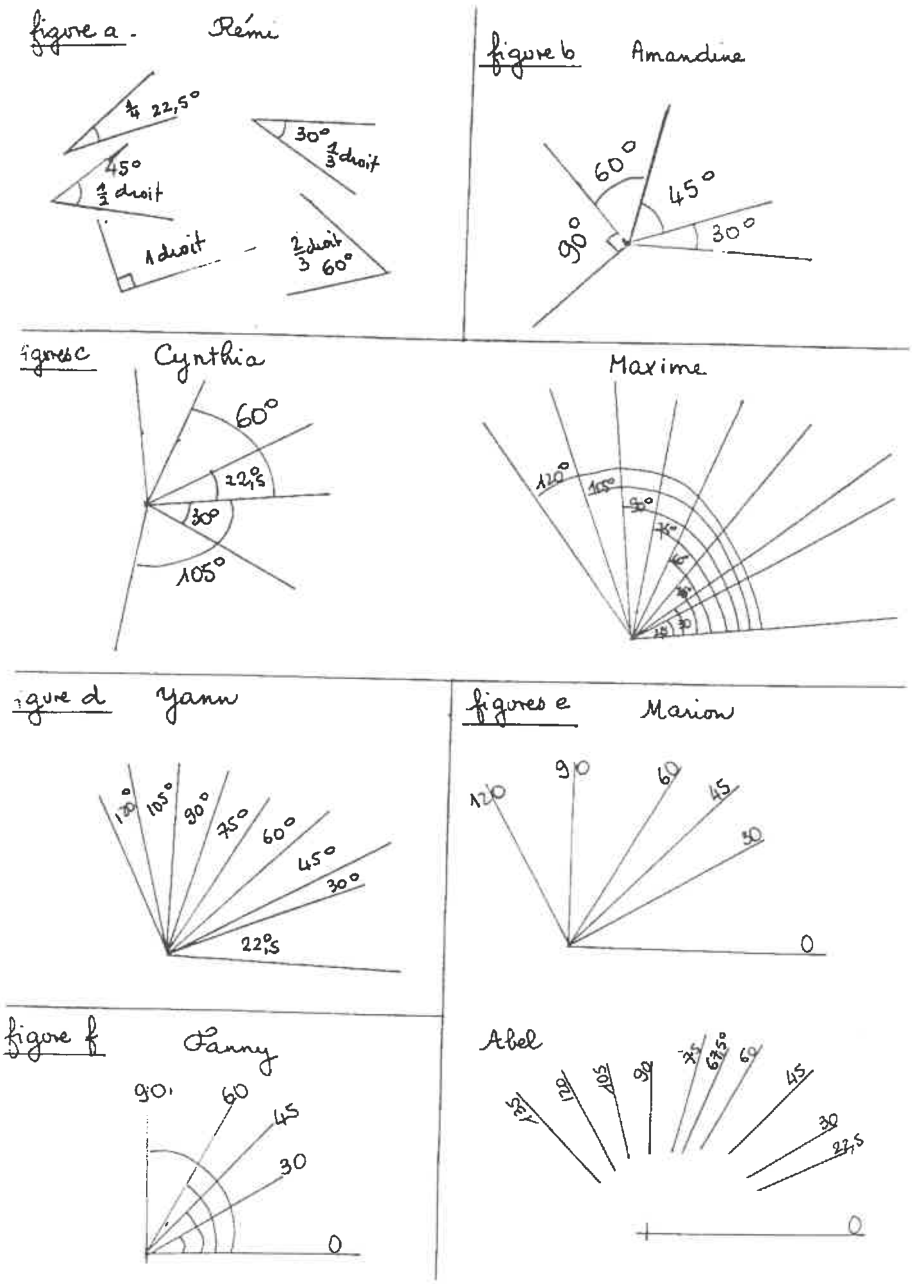


figure a - Rémi
1/4 22,5°
30° 1/3 droit
45° 1/2 droit
1 droit
2/3 droit 60°
figure b Amandine
60°
45°
90°
30°
figures c Cynthia
60°
22,5
30°
105°
Maxime
120°
105°
90°
75°
figure d Yann
120°
105°
90°
75°
60°
45°
30°
22,5
figures e Marion
120
90
60
45
30
0
figure f Fanny
90
60
45
30
0
Abel
135
120
105
90
75
67,5°
60
45
30
22,5
0